El problema aparente

Una teoría del conocimiento

Ramón Casares

Este libro ha sido tipografiado por el autor
usando el sistema del Profesor D. E. Knuth (Stanford University).
He utilizado *su* programa TEX
para componer *mi* texto,
con *sus* tipos Computer Modern,
y para colocar *mis* figuras,
que hice con *su* programa METAFONT.

Esta versión digital es fiel a la publicada en papel,
excepto en los siguientes puntos:
esta página, la anterior y la penúltima son nuevas;
en toda esta versión el símbolo ‘$\otimes$’ es visible; y
la paginación varía, aunque nunca en más de una página.

El problema aparente
Una teoría del conocimiento
Versión digital: 20101011

`www.ramoncasares.com`

Visor Lingüística y conocimiento

El problema aparente
Una teoría del conocimiento

Ramón Casares

El problema aparente

Una teoría del conocimiento

Lingüística y conocimiento – 27

Colección dirigida por
Carlos Piera

Primera edición, 1999

VISOR DIS., S.A., 1999
Tomás Bretón, 55
28045 Madrid
www.visordis.es

ISBN: 84-7774-877-2
Depósito Legal: M. 28.094-1999

Impreso en España – *Printed in Spain*

A Pili

Fernando Sáez Vacas lo comenzó
y lo finalizó Carlos Piera.
Muchas gracias.
R.C.

I. Introducción

Reflexiones subjetivistas sobre problemas y símbolos

¿Sabe sumar una calculadora?

La calculadora hace las sumas para nosotros. Cuando queremos saber lo que nos costará la compra, sumamos con la calculadora el precio de cada uno de los productos elegidos. Si tenemos una calculadora es porque *sabe* sumar. Si la calculadora no supiese sumar, ¿por qué razón íbamos a tenerla? En lo que sigue intentaremos rebatir esta opinión.

Si la calculadora supiera, efectivamente, sumar, entonces la calculadora sería una materialización del concepto 'suma'. Supongamos, sin embargo, que le damos la calculadora a alguien que desconoce la notación árabe de los números y los convencionalismos matemáticos que asignan el signo '+' a la suma y el signo '=' a la igualdad, aunque sepa sumar usando otro simbolismo. Seguramente la calculadora no le serviría para sumar, lo que prueba que o bien la calculadora no es la suma hecha materia o, cuando menos, que el concepto puro de suma no puede ser usado directamente.

Visto de otro modo, el funcionamiento de la calculadora podría describirse así: si aprieto la tecla a la que doy el significado dos (2), después la tecla que interpreto como suma (+), luego vuelvo pulsar la tecla correspondiente al dos (2), y por fin aprieto la tecla asignada a la igualdad (=), entonces se iluminan en la pantalla una serie de puntos que interpreto como cuatro (4). Es decir, que en este otro modo de ver las cosas, la calculadora es un ingenioso interruptor que enciende unas u otras luces según cual haya sido la secuencia de teclas operada.

$$2 + 2 = 4$$

El funcionamiento de la calculadora en el ejemplo anterior se puede anotar así: $2+2=4$. Las teclas pulsadas son aquéllas que aparecen hasta el '=', incluida ésta, y lo que sigue son luces en la pantalla. Es decir, que si somos capaces de expresar un problema en la forma $x?\ a+b=x$, siendo a y b dos cantidades conocidas, entonces podemos solucionarlo con la ayuda de la calculadora.

Todo esto nos descubre que la calculadora sólo es útil a aquellas personas que son capaces de expresar algunos de los problemas que se encuentran del modo que la calculadora está preparada para resolver. Lo primero es saber si el problema es de los que la calculadora puede ayudar a resolver, pero averiguar esto, sin ir más lejos, es un problema que la calculadora no ayuda a resolver.

Es curioso que la calculadora sirva, exclusivamente, a quienes ya saben sumar. Porque para ser capaz de expresar que la solución de un problema es el resultado de sumar unas cantidades, y no de restarlas, hay que tener previamente el concepto de suma. Con lo que concluimos que el concepto de suma no está en la calculadora, sino en quien usa la calculadora.

¿Para qué sirve una calculadora?

Que se vendan calculadoras, aunque sólo sean útiles a quienes ya saben sumar, parece un contrasentido, pero ya sabemos que no lo es. La calculadora efectúa una suma concreta.

Nosotros podemos efectuar algunas sumas en la cabeza, dependiendo de nuestra habilidad y del tamaño de la suma. Otras preferimos hacerlas con la ayuda de papel y lápiz. En mi caso, escribo las cantidades a sumar una sobre la otra, alineadas por la derecha, usando la numeración árabe decimal. Luego, de derecha a izquierda, voy sumando los dígitos llevando la cuenta de los acarreos. Es éste un procedimiento de tratamiento puramente simbólico del que resulta un número árabe decimal que es la expresión simbólica de la cantidad que busco. Si el número representa dinero o tornillos es algo que, este sistema de representación, pierde. La calculadora automatiza este proceso, pero hace fundamentalmente lo mismo que yo con mi papel y mi lápiz, manipula símbolos para ayudarme a efectuar una suma concreta de cantidades conocidas.

$$\begin{array}{r} \mathit{1} \\ 3\,9\,2 \\ 1\,5 \\ +\,1\,8\,1 \\ \hline \mathit{5\,8\,8} \end{array}$$

Saber sumar tiene, pues, dos aspectos. Saber que es precisamente una suma lo que soluciona un determinado problema, y saber hacer la suma concreta que el problema plantea. Ocurre que si lo que falta para solucionar un problema es efectuar la suma de dos cantidades conocidas, entonces podemos dar por solucionado el problema porque, en caso de que no la podamos hacer directamente en la cabeza, sabemos que existen modos de efectuar mecánicamente la operación.

La calculadora hace sumas, pero ignora completamente el concepto de suma. Saber hacer sumas sirve porque hay muchos problemas, o partes de problemas, que pueden convertirse en una suma.

¿Cómo se usa una calculadora?

En la resolución de un problema con la ayuda de una calculadora hay tres fases:

- En la primera se expresa simbólicamente el problema de manera que pueda resolverse con la calculadora.
- En la segunda se efectúa la operación en la calculadora.
- En la tercera se interpreta el resultado obtenido en la calculadora.

Muchas veces lo que muestra la calculadora en su pantalla nos parece la solución buscada. Sin embargo, casi nunca* es la luz emitida por la pantalla de la calculadora lo que soluciona el problema. Ni tampoco esa luz entendida como una secuencia de dígitos. Y sólo en problemas puramente matemáticos es la solución el número que resulta de leer la secuencia de dígitos. En general se necesita una interpretación *semántica* del resultado simbólico.

En muchas ocasiones también ignoramos que hemos realizado una reformulación simbólica del problema. Pero el único momento en el que no hacemos esta reformulación es cuando, siguiendo las instrucciones del manual de la calculadora, pulsamos las teclas tal y como se indica. El propósito del manual es que nos familiaricemos con el tipo de simbolizaciones, es decir, con la *sintaxis*, que la calculadora acepta y usa al mostrar sus resultados. Para ello, en general, se nos presenta la operación en una sintaxis de uso común y, a la vez, como la secuencia de teclas a pulsar. Como las calculadoras se diseñan con el propósito de facilitar su uso, se procura que la traducción, de una forma a la otra, sea la mínima posible o nula. En el caso de las calculadoras que usan la notación polaca inversa, es patente la reformulación sintáctica del problema, pero sólo hasta que nos acostumbramos a usarlas.

El uso de la calculadora es un ejemplo de una situación mucho más general. Nuestro lenguaje, incluido éste en el que estoy escribiendo, es un lenguaje simbólico. Nuestro pensamiento consciente es también simbólico. Ambos usan símbolos, que son etiquetas asociadas

* Nunca digas nunca.

convencionalmente a objetos, organizados según convenciones sintácticas. Y sin embargo, ninguna de nuestras necesidades primarias es simbólica. Pensar no alimenta. Sucede, como con la calculadora, que la simbolización es sólo una manera más eficaz de alcanzar la solución de nuestros problemas, pero que necesita para ser efectiva de un proceso previo de reformulación sintáctica del problema y, posteriormente, de una interpretación semántica de la solución.

El diccionario

El diccionario explica todas las palabras del idioma. Y las explica usando palabras. Como normalmente conocemos el significado de muchas de ellas, el diccionario nos es útil. Pero cuando usamos el diccionario de un idioma que estamos aprendiendo, es frecuente que al explicar una palabra el diccionario use otras palabras cuyo significado también desconocemos, y en este caso el diccionario no nos ayuda.

Si escribiéramos cada palabra del diccionario en una hoja enorme de papel, y dibujáramos una flecha desde cada palabra a cada una de las palabras que aparecen en la definición de la primera, obtendríamos una red que nos serviría para saber que palabras es necesario conocer para conocer la primera. Suponiendo que en las definiciones se usaran diez palabras, que es una suposición conservadora y que facilita los cálculos, entonces de la palabra saldrían diez flechas, y de cada una de las diez alcanzadas saldrían otras diez, con lo que al segundo salto alcanzaríamos cien palabras. Según estos cálculos, con seis saltos se llegaría a un millón de palabras, lo cual es imposible ya que no hay tantas palabras diferentes en el idioma. Lo que sucede, naturalmente, es que pronto empezarían a repetirse palabras, esto es, llegaríamos hasta ellas por varios caminos.

También podemos formar secuencias, o cadenas, de palabras eligiendo, como siguiente a una palabra, la que figura de primera en la definición de aquella palabra. Así, por ejemplo, tomando el diccionario de la Academia[1], y partiendo de la palabra *problema* obtenemos la siguiente cadena: problema, cuestión, pregunta, demanda, súplica, acción, ejercicio, acción, ejercicio, etc. Este ejemplo nos descubre que la definición de *ejercicio*, "acción de ejercitarse u ocuparse en una cosa", es deficiente, y más cuando define *ejercitar* como "dedicarse al ejercicio de un arte, oficio o profesión". Es deficiente porque si alguien consulta la palabra *ejercicio* es probable que desconozca también la palabra *ejercitar*, que es de la misma familia, por lo que las

[1] Real Academia Española (1970): *Diccionario de la lengua española.*

definiciones dadas no le permiten salir de su ignorancia.

problema. Cuestión que se trata de aclarar [...].

No es mi propósito, sin embargo, criticar a la Academia, sino mostrar la imposibilidad de alcanzar el significado de las palabras usando únicamente palabras. Porque es notorio que el diccionario, como todo sistema simbólico, forma un sistema cerrado que, en sí mismo, no contiene significado alguno. En resumen, el diccionario sólo sirve a quien ya conoce el idioma.

Un cuento

Una vez un rey se preguntó quién sería el más tonto del mundo, tal vez porque tuviera interés en conocerlo, o tal vez porque quisiera abdicar en él. (No me gusta.) (No seas suspicaz, Piripili. La verdad es que no va por ti. Sigo.) El caso es que antes de intentar encontrarlo, y aunque todo el mundo cree saber con claridad lo que es una persona tonta, (Perdona que te interrumpa, pero dime, ¿vivías tú cuando aconteció todo esto, o todavía no habías nacido?) (Yo no vivía aún, pero ¿qué importa eso? Como te iba diciendo, aunque todo el mundo cree saber lo que es una persona tonta), el rey pidió a los sabios de su reino que le hicieran una descripción de la persona que debería ser buscada. (Yo podría hacerlo mejor que esos sabios, ¿me dejas intentarlo?) (Vaya, Piripili, parece que hoy estás lúcida.) (La verdad es que tengo la ventaja de vivir en otros tiempos (je, jé).) (¿Quieres decir que te aprovecharás de la experiencia filosófica acumulada desde los tiempos de esta historia?) (Quiero decir que ahora puedo señalar al más grande tonto de todos los tiempos porque, para desgracia de todos los que ahora vivimos, el más grande tonto de todos los tiempos es nuestro contemporáneo y, además, el más grande tonto de todos los tiempos eres tú.) (Estoy dispuesto a aceptar eso si me lo justificas debidamente.) (Yo creo que la persona más tonta de todos los tiempos es aquélla que es capaz de aceptar que él mismo es el más tonto de todos los tiempos si se lo prueban debidamente.) (Vale, pero aunque reconozco que lo que te he dicho es una gran tontería, no me reconozco el más tonto de todos los tiempos.) ((No puedo desaprovechar esta ocasión (ja, já).) Puesto que reconoces haber dicho una "gran tontería" (ji, jí), eres un gran tonto y, según lo veo, con grandes posibilidades de ser el más tonto del mundo y aun el más tonto de todos los tiempos.) (Ya vale, ¿quieres que continúe?)

(Sí, (ju, jú) es el mejor de los cuentos que me has contado, sigue, por favor.)

Un sabio de los más sabios habló así: "El más tonto habrá de ser aquél que no sea capaz de distinguir, siquiera, las dos cosas más dispares, o sea, aquél que todo lo confunda. Así será incapaz de cualquier discernimiento".

Pero entonces otro sabio, que era famoso porque, aunque él nunca había formulado una teoría satisfactoria, tenía una extraordinaria habilidad para derribar teorías (incluídas las suyas, por lo visto), contestó: "De ser así el más inteligente, o el menos tonto, habría de ser aquél que todo lo distinguiera, que tuviera un absoluto discernimiento. Sin embargo, conozco el caso de un individuo con tal discernimiento y parece bastante confuso". Y les contó la historia que sigue.

Lo que voy a relataros trata de alguien que en un principio fue tomado por una persona de una preclara inteligencia, pero que más tarde, al transcurrir el tiempo, fue considerado tonto. Y, sin embargo, el paso de uno al otro estado fue lento, ininterrumpido y razonable. Ahora, *a posteriori*, hay quien dice que siempre estuvo loco. Por el contrario, otros opinan que siempre, desde el principio y hasta ahora, ha sido un sabio, pero que nadie, ni entonces ni ahora, es capaz de comprender sus más profundas conclusiones.

Pero no quiero hablaros más del asunto sin deciros, más concretamente, de que se trata. Así que pasaré a contaros, comenzando por el principio, y hasta su desconcertante final, la historia de esta persona.

Mas ahora que debo remontarme al comienzo, recuerdo que ya entonces se le consideró de una manera especial. Porque el niño nunca llegó a comprender la razón por la cual se utilizaba el mismo nombre para designar, pongamos por ejemplo, a dos margaritas, cuando a él le parecía evidente que eran diferentes, o más exactamente, absolutamente diferentes.

Claro está que al principio la cosa fue algo más confusa. Le enseñaban la flor y le decían 'margarita', y todo iba bien si le preguntaban cómo se llamaba aquella misma flor, mas si le mostraban otra margarita no sabía qué contestar. Le mostraban de nuevo la primera y respondía rápidamente 'margarita', pero si volvían a la segunda decía que nunca le habían dicho cual era su nombre.

Pasado algún tiempo llegó a comprender el significado de 'igual', aunque, según él lo veía, sólo debería ser aplicado a entes abstractos, a construcciones mentales, y nunca a objetos, ya que entre éstos últimos no había dos que fueran iguales. Estudió el concepto de igualdad con otros sabios. Él los convenció de que era incontestable que no podían existir dos objetos iguales. Siempre se podría encontrar alguna diferencia, en último caso no podían ocupar ambos el mismo lugar en el espacio.

Los sabios le explicaron que la traslación en el espacio era una operación que, por definición, conservaba la igualdad. Respecto a la diferencia que seguía encontrando entre cada par de cosas, se le dijo que no se podía tener una palabra para cada objeto, porque entonces sería imposible aprender y recordar todas las palabras. Así, a aquellos objetos cuyo centro era redondo y amarillo y su periferia una colección de hojillas de color blanco, se les denominaba margaritas.

Él no pudo dar por buena aquella explicación porque, entrando en mayores profundidades, hizo notar a los sabios que, por ejemplo, él seguía sin entender qué era una hojilla, y por qué objetos tan diferentes como los que le habían mostrado como ejemplos de hojilla podían compartir el mismo nombre. Concluyó que la única solución válida al problema era enumerar exhaustivamente todos los objetos cuyo nombre era hojilla o era margarita.

Tal procedimiento extensivo no era del agrado de los sabios por motivos estéticos, además de ser impracticable. Aun así tuvieron que convenir que era el teóricamente más correcto. Para contrarrestarlo idearon otro esquema. Todos los objetos poseen un conjunto de propiedades medibles. Pues bien, parece posible agrupar en un solo nombre a los objetos que tienen valores cercanos de dichas propiedades. Se definirían objetos prototípicos y los objetos reales tomarían el nombre del prototipo más cercano según una métrica definida sobre el espacio de características antes definido.

Los sabios estaban satisfechos, y él también, así que les pidió a los sabios que le desarrollaran el esquema de manera que él mismo pudiera utilizarlo prácticamente. Los sabios acometieron con entusiasmo la empresa pero, conforme avanzaban, la construcción se iba haciendo más y más compleja, y aun así descubrían objetos que quedaban mal nombrados. Finalmente los sabios tuvieron que darse por vencidos. A veces el objeto no era suficiente para merecer un nombre adecuado, y su entorno y el interés del hablante eran más importantes en la denominación del objeto. Otras veces el comportamiento temporal del objeto era más importante que su proyección estática. Estas y muchas otras dificultades que encontraron fueron las causantes de la ruina del proyecto, fracaso que dió inmensa fama al extraño individuo que había propuesto el problema.

A medida que fue perfeccionando su memoria, se fue percatando de que lo que antes era, ahora ya no lo era. Es decir, que al pasar el tiempo las cosas cambian, de modo que el objeto que en el instante actual se encuentra en una determinada posición del espacio era siempre diferente al objeto que se encuentra en el mismo lugar en el instante siguiente. Y aún más, que ni en otros lugares ni en otros momentos encontraba un objeto igual. Así que un objeto sólo merecía su nombre durante el instante en el que existía, ni antes ni después.

Merced a su completo discernimiento dejó de ver continuidades. La realidad de un instante y la del instante siguiente se le aparecían absolutamente diferentes. Se sorprendía cada vez. Cada instante ocurría de nuevo la creación de todo el universo.

Pero lo más grave fue lo relativo a su autoconsciencia. Conforme más consciencia de sí mismo ganaba, más se destruía su consciencia. Esta paradoja se explica porque cuanto más se veía a sí mismo como una parte del universo, más se asemejaba él mismo al resto del universo. Así su personalidad estalló de golpe al convertirse en una sucesión inconexa de yoes. Sucesión que 'él', al no existir más que un instante cada vez, era incapaz de contemplar.

Al menos ésta es la explicación que dieron algunos de los sabios que lo habían conocido en sus mejores tiempos. Aparentemente su estado era de imbecilidad completa, pero bien pudiera ser que su yo se hubiera disuelto en el universo incomprensible. O que hubiera alcanzado el nirvana o el éxtasis.

(Y bien, ¿qué hizo el rey?, ¿cómo termina el cuento?)

Papá, ¿por qué respiramos?

— Papá, ¿por qué respiramos?
— Porque así se oxigena nuestro cuerpo.
— Y, ¿por qué se oxigena el cuerpo?
— Porque necesita oxígeno para quemar azúcares
— Ya, pero ¿por qué quema azúcares?
— Pues, porque necesita energía.
— Pero, ¿por qué necesita energía?
— Para movernos.
— Y, ¿por qué nos movemos?
— Porque queremos.
— Vale, pero ¿por qué queremos?
— Porque sí.

Señalar

Las palabras más sencillas son aquéllas que designan directamente objetos, como por ejemplo la palabra ‘margarita’. Parece que basta señalar una margarita para explicar lo que es.

El acto de señalar parece primario y directo, pero no lo es. Pruébese, por ejemplo, a señalar una estrella determinada a alguien que no esté familiarizado con el cielo nocturno. No es una tarea fácil, lo que demuestra que lo señalado con el dedo no queda determinado con demasiada exactitud.

Señalar sirve para discriminar entre objetos, pero no para definir. Si no tengo la más remota idea de lo que es una piedra, y para explicármelo alargan la mano con el dedo índice extendido, puedo pensar que se trata del dedo índice, o de la uña del dedo de quien me lo muestra, o de la dirección noroeste a la que apunta, o del suelo en donde está la piedra, o de la ribera del río en la que se halla, o de la piedra.

Por otra parte, al señalar un objeto es completamente imposible determinar si se refiere concretamente al objeto señalado o a alguna de las clases en las que ese objeto puede quedar clasificado. Es decir, es imposible determinar si me están señalando un ‘canto rodado’ o una ‘piedra’. Para deshacer esta ambigüedad hay que utilizar palabras, pero ya sabemos que, en última instancia, las palabras tampoco sirven para definir palabras.

Nombres comunes

¿En qué se diferencia una piedra de una roca o de una arena? En el tamaño. Si lo pensamos un poco, nos daremos cuenta de que estos tamaños tienen al hombre como medida. Una piedra es un objeto duro y de un tamaño manejable y que, por lo tanto, nos puede servir para abrir una nuez. Una roca no nos sirve porque es tan grande y pesa tanto que no somos capaces de moverla. Una arena es, en cambio, tan pequeña que apenas nos sirve individualmente para nada, aunque en montones podemos usarla como asiento. “El hombre es la medida de todas las cosas”, ya lo decía Protágoras[2].

Cuando definimos algo por sus propiedades, lo que estamos haciendo es plantear un problema. Al decir que la piedra es una cosa, a la vez, dura y manejable, estamos planteando el problema de encontrar aquellas cosas que cumplen estas dos condiciones, la de ser duras

[2] Barrio G., J. (1977): *Protágoras y Gorgias. Fragmentos y testimonios.*

y la de ser manejables. Podemos expresarlo así: $x?\ (x \text{ es dura}) \wedge (x \text{ es manejable})$. El nombre común 'piedra' se usaría para referirse a cualquiera de las soluciones de dicho problema.

Parece entonces interesante convenir que el nombre común es, también, el nombre del problema cuyas soluciones son cada uno de los ejemplares de dicho nombre común. Porque

$$\text{piedra} \ = \ x?\ (x \text{ es dura}) \wedge (x \text{ es manejable})$$

puede leerse fácilmente así: una piedra es (=) una cosa (x) que es dura y ($\wedge$) que es manejable. El nombre común es la manera de usar un problema para referirnos en perífrasis o, lo que es lo mismo, usando un rodeo o circunloquio, a sus soluciones.

Así que cuando en una frase aparece un nombre común, como 'piedra' o 'margarita', se está planteando, resolviendo y solucionando un problema. Que tratemos los nombres comunes con una total facilidad y sin esfuerzo, nos impide percatarnos de la poderosísima maquinaria de resolución de problemas que se esconde en nuestro cerebro.

¿Qué es un problema?

Cuando pensamos en un problema, véase Polya[3], pensamos en un enunciado, que expone unas condiciones y proporciona unos ciertos datos, en un conocimiento de la materia que permite resolver ese tipo de problemas, y en un conjunto de soluciones posibles.

Esto, por supuesto, se aplica perfectamente a los problemas académicos típicos de las matemáticas o de la física. Los problemas que nos encontramos fuera del colegio tienen sólo un cierto parecido con un problema académico. La mayoría de las veces no hay un enunciado explícito, e incluso en ocasiones lo más complicado del problema es percatarse de que lo es. Así, es posible ir modificando el enunciado conforme resolvemos el problema. Y aunque, en general, las soluciones aceptables están mejor definidas que los enunciados, tampoco es siempre así.

Si abstraemos al máximo, para alcanzar el concepto más puro de problema, nos quedamos con cierta libertad, ya que tiene que haber varias posibilidades para que haya problema, y con cierta condición que establece qué vale como solución y qué no vale. Ni los datos, ni el conocimiento quedan incorporados a la definición. Ambos son

[3] Polya, G. (1957): *How to solve it.*

información que facilita la resolución del problema, pero hay problemas en los que no se dispone de ella, siendo un ejemplo conspicuo el problema aparente.

Llegamos así a la definición de problema. Un *problema* es una condición puesta a cierta libertad. Sin libertad no hay problema. La *solución* del problema es aquel uso de la libertad que satisface la condición. La *resolución* del problema es el proceso que discurre desde el punto en el que se tiene el problema, con su condición y su libertad no ejercitada, hasta el momento en el que se tiene la solución, o sea, hasta el momento en el que se ejerce la libertad y se satisface la condición. Es importante hacer la distinción entre solución y resolución; resolver es a buscar como solucionar es a encontrar.

El simbolismo

Merced a los simbolismos podemos representarnos problemas, resoluciones y soluciones. El simbolismo sirve para la resolución de problemas. Para ello es menester que cumpla tres condiciones:

- Que el problema pueda representarse simbólicamente, es decir, que se pueda expresar sintácticamente el problema.
- Que el simbolismo disponga de medios suficientes para permitir la resolución del problema ya expresado sintácticamente.
- Y que la solución simbólica encontrada se corresponda con alguna solución del problema, es decir, que la solución simbólica admita una interpretación semántica, o sea, que tenga significado.

La solución

Asignando un nombre simbólico a cada posible solución, cumplimos la tercera de las condiciones.

Cuanto menor sea el trecho que va del dicho al hecho, mayor será el significado del dicho. Las frases imperativas como, por ejemplo, ¡escapa!, tienen un mayor contenido semántico porque corresponden casi directamente a la solución de un problema. Nótese que, además, suelen tener una sintaxis rudimentaria. Las frases que se dirigen a los animales son de este tipo.

$$\text{Problema} \longrightarrow \text{Resolución} \longrightarrow \text{Solución}$$

El problema

Para representar un problema hay que representar sus dos componentes: la libertad y la condición.

La libertad del problema es un nombre simbólico, al que denominaremos incógnita, de significado indefinido. Es esencial que la incógnita no tenga significado, es decir, que no se refiera a ninguna solución concreta, porque de lo contrario no habría problema. La incógnita, mientras lo es, es un nombre sin significado, es un puro artefacto sintáctico. Siendo la incógnita un símbolo solamente sintáctico, entonces el problema, que es una expresión que integra condiciones e incógnitas, ha de ser también sintaxis sola.

Las relaciones entre objetos son condiciones. Las condiciones se pueden combinar de acuerdo a las reglas de la lógica[4] o del álgebra de BOOLE[5]. Hay tres formas básicas de combinar condiciones, a partir de las cuales es posible expresar cualquier otra combinación de condiciones:

- La negación (notada ¬) de una condición es otra condición que se cumple, exactamente, cuando no se cumple la primera; si alguien dice que *no* quiere un helado de chocolate, entonces cualquier helado cumple la condición, excepto el de sabor a chocolate.
- La disyunción (notada ∨) de dos condiciones es otra condición que se cumple si se cumple alguna de las dos primeras, o ambas; si lo que quiere es un helado de limón *o* de fresa, está diciendo que un helado de fresa cumple la condición, que un helado de limón también la cumple, y que incluso uno de limón y fresa la cumple, los tres le valen.
- La conjunción (notada ∧) de dos condiciones es otra condición que se cumple sólo si se cumplen las dos primeras; si, por fin, lo que quiere es un helado de limón *y* de fresa, entonces sólo cumple la condición un helado que tenga los dos sabores, y no le vale un helado de limón solo.

$$\text{Problema}\begin{cases}\text{Libertad}\\ \text{Condición}\end{cases}$$

[4] Quine, W.V.O. (1940): *Mathematical Logic.*

[5] Boole, G. (1854): *An Investigation of the Laws of Thought.*

La resolución

La resolución simbólica del problema es un proceso que, tomando la expresión sintáctica de un problema, la va transformando en otras expresiones hasta que llega a una expresión que es un problema de solución conocida.

Por ejemplo, supongamos que quiero tener la seguridad de que aunque hoy me coma dos manzanas, me quedarán otras dos manzanas para mañana, ¿cuántas manzanas he de tener? La incógnita, x, es el número de manzanas que preciso. El problema se puede expresar así: $x?\ x - 2 = 2$, es decir, es el problema de hallar aquel número de manzanas tal que, si me como dos, me quedan dos.

En el problema propuesto, la incógnita, que representa la libertad, lo indefinido, es x. La condición queda estabecida al tener que cumplirse la igualdad, que es una relación, de dos cantidades.

La resolución podría ser como sigue:

$$x?\ x - 2 = 2$$
$$x?\ x - 2 + 2 = 2 + 2$$
$$x?\ x - 0 = 4$$
$$x?\ x = 4.$$

La solución de este último problema, $x?\ x = 4$, es conocida, a saber, cuatro. Esto significa que debo tener cuatro manzanas para que, comiéndome hoy dos, tenga otras dos para mañana.

El algoritmo para resolver este problema consiste en sumar 2 a las expresiones a la izquierda y a la derecha del símbolo '='. Esto es válido porque si sumamos la misma cantidad a dos cantidades que son iguales, las cantidades aumentadas siguen siendo iguales. Con esto se consigue despejar la incógnita que, en un principio, estaba acompañada de un incómodo -2. Al despejar la incógnita, lo que queda al otro lado del símbolo '=' es la solución buscada.

Se pueden idear otros algoritmos más generales. Por ejemplo, uno capaz de resolver el problema sea cual sea la cantidad b que se resta a la incógnita para que el resultado sea otra cantidad conocida cualquiera a, es como sigue:

$$(x?\ x - b = a) \Longrightarrow (x?\ x = a + b).$$

Del carácter solo sintáctico de la incógnita derivábamos el carácter meramente sintáctico del problema. Ahora, de éste, inferimos el carácter también exclusivamente sintáctico del algoritmo transformador de problemas. De modo que la resolución, como el problema, es un objeto sintáctico y no semántico.

Los teoremas

Resulta que si $a = b$ entonces también es $b = a$, y viceversa. La frase anterior es resumida por los matemáticos así: $a = b \iff b = a$, y entonces añaden que la igualdad de los números tiene la propiedad de simetría, pero sólo vuelven a repetir lo dicho en la primera frase. El caso es que merced a esta propiedad de la igualdad de los números, si un problema tiene la forma $x?\ x = a + b$, entonces resulta que el problema $x?\ a + b = x$ es equivalente y tiene la misma solución. Este segundo problema puede ser resuelto con la ayuda de la calculadora, pero no el primero. Luego ésta es una transformación de expresiones útil porque permite resolver más problemas con la calculadora.

La cuestión que quiero plantear es si estamos, o no, obligados a admitir que $a = b \iff b = a$, o por tratarse de un simbolismo podemos establecer cualesquiera reglas que queramos. Lo inmediato es pensar que lo único que generaliza la propiedad anterior es que si cinco es igual al número de dedos en mi mano, entonces el número de dedos en mi mano es igual a cinco. Esto es una obviedad que no puede ser negada y, por consiguiente, estamos obligados a admitir la propiedad simétrica de los números.

A pesar de su aparente sencillez, la explicación anterior da por supuesto demasiado. Nuestros procesos de simbolización y semantización son tan potentes y automáticos que apenas nos percatamos de que los usamos. Ahora intentaremos otra explicación más larga, no por aburrir, sino por evitar supuestos infundados.

La elección de símbolos es completamente arbitraria, o mejor dicho, convencional. Nada de la palabra margarita sugiere la flor que así llamamos. Por esta razón en otros idiomas usan otros nombres. Basta con que todos los hablantes del idioma convengan usar el mismo nombre para referirse a las margaritas. La ordenación sintáctica de las palabras en frases también obedece a reglas arbitrarias. Así, el orden que consiste en comenzar la frase por el sujeto seguido del verbo y terminarla por los complementos, que se emplea en castellano, no es el usado en otros idiomas, como el alemán o el japonés.

Pero una vez establecida la convención, puede resultar que hay varias maneras de decir lo mismo. Volviendo al ejemplo, resulta que $a = b$ dice lo mismo que $b = a$. En este caso, todos los que han aceptado la primera convención están obligados a convenir, también, que $a = b \iff b = a$. Lo contrario supondría que los discrepantes usan otro convenio, es decir, usan otro idioma.

No sé nada

En castellano la doble negación supone una negación reforzada. La frase ‘no hay ninguno bueno’ significa, en castellano, que ‘absolutamente todos son malos’ y no que ‘hay alguno bueno’, como ocurre en otros idiomas, por ejemplo el inglés, en los cuales la doble negación afirma.

Las paradojas

Los simbolismos sirven para resolver problemas. Tienen dos capas: la sintaxis con las expresiones, y la semántica con las soluciones. Algunas expresiones tienen una correspondencia semántica directa, de manera que sirven para expresar simbólicamente las soluciones. En otros casos la correspondencia es indirecta, como ocurre con los nombres comunes, y en otros no la hay, y entonces hablamos de paradojas. Una paradoja es una expresión sintáctica correcta, que no tiene correspondencia semántica, pero que se confunde con expresiones que sí la tienen.

Por ejemplo, la expresión ‘un reloj redondo’ corresponde al problema $x?$ (x es reloj) $\wedge$ (x es redondo), que tiene muchas soluciones y que, por lo tanto, tiene significado. Y sin embargo, la expresión de estructura similar ‘un cuadrado redondo’ es paradójica porque el problema correspondiente, $x?$ (x es cuadrado) $\wedge$ (x es redondo), no tiene solución, y por lo tanto no tiene significado.

Otro caso de paradoja es el de los conjuntos infinitos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales, definido así:

$$\mathbb{N} = \{x?\ (x = 0) \vee (\exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1)\}.$$

Hemos notado el problema entre llaves, ‘{’ y ‘}’, para expresar que $\mathbb{N}$ es el conjunto de todas las soluciones del problema. La relación $y \in \mathbb{N}$ es verdadera si y es elemento del conjunto $\mathbb{N}$, y falsa si no lo es. El signo $\exists$ denota el cuantificador existencial, de modo que $\exists y \in \mathbb{N}$ se cumple si existe algún elemento que pertenezca al conjunto $\mathbb{N}$. Luego la expresión que define $\mathbb{N}$ dice, en castellano, que ‘$\mathbb{N}$ es el conjunto de todos los números que, o bien son el cero, o bien son el resultado de sumar 1 a algún elemento perteneciente al conjunto $\mathbb{N}$’. Pues bien, el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es paradójico porque el problema que lo define tiene infinitas soluciones, siendo imposible completar su construcción:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}.$$

Gödel

Un tercer tipo de paradoja ocurre cuando la secuencia de resolución no puede terminar, es decir, no puede alcanzar la solución.

Es el caso de la paradoja 'esta frase es falsa', que si fuera cierto lo que dice, entonces sería falsa, pero entonces sería cierto lo que dice, y entonces sería falsa, y así por siempre. Llamaremos, a este tipo de paradoja, paradoja de EPIMÉNIDES, ya que se cuenta que este cretense dijo que todos los cretenses son unos mentirosos. La misma paradoja fue redescubierta por RUSSELL en el formalismo de la teoría de conjuntos, al definir un conjunto R del siguiente modo: $R = \{x?\ x \notin x\}$, que es paradójico porque no se puede afirmar que $R \in R$ ni, por el contrario, que $R \notin R$.

GÖDEL descubrió que pueden expresarse problemas de este tipo en el formalismo necesario para expresar la aritmética. Reduciendo a la caricatura el teorema de indecidibilidad de GÖDEL[6], éste demuestra que si un sistema inferencial es lo bastante potente como para permitir expresar la proposición 'esta proposición no es inferible', como es el caso de la aritmética axiomatizada de los Principia Mathematica de WHITEHEAD y RUSSELL, entonces tal sistema formal admite proposiciones indecidibles.

La recursividad es la propiedad que permite que una expresión haga referencia a sí misma. Nos permite decir, 'esto es lo que yo digo'. Muchos procedimientos de uso cotidiano lo son, por ejemplo, todos aquéllos en los que se dice 'y repita este procedimiento hasta que . . . '. Son recursivos todos los libros que dicen 'este libro', a no ser que 'este libro' esté siempre escrito entre comillas. La recursividad ha sido investigada por HOFSTADTER[7] en disciplinas tan diversas como la música de BACH y el dibujo de ESCHER.

Todos los simbolismos con poder expresivo no limitado son recursivos, es decir, admiten expresiones recursivas. En todos los simbolismos que permiten la recursividad se pueden expresar paradojas de EPIMÉNIDES.

Esta frase es falsa

---

[6] Gödel, K. (1931): *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme, I.*

[7] Hofstadter, D.R. (1979): *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid.*

El problema de la parada

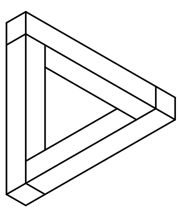
Un algoritmo es un procedimiento simbólico completamente definido, es decir, definido sin ambigüedad, de tal manera que puede emplearse para instruir a una computadora.

Uno de los más famosos descubrimientos de la ciencia de la computación establece que no puede construirse un algoritmo que finalice y que diga, de cualquier algoritmo, si finalizará o si no tendrá fin[8]. Si tal algoritmo pudiera construirse, entonces las paradojas apenas serían paradojas.

Es posible darse cuenta de que la frase 'esta frase es falsa' es paradójica. Basta mostrar que las dos únicas posibilidades existentes, que sea verdadera y que sea falsa, llevan la una a la otra, de modo que forman un círculo vicioso. Si esto fuera todo, repito, las paradojas apenas serían paradojas.

Pero qué pasa con la paradoja de la tarjeta de Jourdain[9], que en una de sus caras muestra la frase 'la frase del otro lado de esta tarjeta es falsa' y en la otra cara 'la frase del otro lado de esta tarjeta es verdadera'. Pues ocurre que también puede construirse un algoritmo que detecte esta paradoja.

En realidad, dada una paradoja concreta, siempre es posible construir un algoritmo finito que la detecte. Un algoritmo finito puede detectar, incluso, un conjunto infinito de paradojas. Lo que hace que las paradojas sigan siendo paradojas, es que no puede construirse un algoritmo finito que sea capaz de detectar todas las paradojas posibles.



Tribar de Penrose

[8] Arbib, M.A. (1987): *Brains, Machines, and Mathematics*.

[9] Smullyan, R. (1984): *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otras paradojas lógicas*.

Platón

El idealismo postula la existencia de las ideas, e incluso les asigna un mayor carácter de verdad que a las cosas. Así, la idea aritmética $1+1=2$ tiene para los idealistas una existencia plena, eterna, inmutable y absoluta, o sea, universal. Esto está en abierta oposición a nuestra teoría, por lo que tenemos que refutar que $1+1=2$ es una verdad universal.

Nuestro primer ataque va contra la notación. Es evidente que el signo 1 podría significar tres tanto como significa uno. En este caso, y manteniendo el significado de los demás signos, $1+1=2$ no sería verdad. Por lo tanto, depende de la interpretación de los signos y no es una verdad universal.

El idealista puede, entonces, retroceder un paso y afirmar que la verdad universal es que 'uno más uno son dos'. Si añadimos una moneda a la moneda que ya teníamos, nos quedamos con dos monedas, lo que quiere decir que este tipo de problemas se resuelven con la ayuda del 'uno más uno son dos'. Pero, ¿qué pasa si añadimos una gota de agua a la gota de agua que ya teníamos? Que nos quedamos con una gota de agua, eso sí, mayor que aquélla que teníamos.

El idealista nos objetará que este caso no refuta la suma de uno más uno, sino que, simplemente, en el caso de las gotas de agua, no se puede sumar. Luego, en definitiva, no siempre puede aplicarse la suma, por lo que 'uno más uno son dos' es una abreviatura de 'un objeto sumable más un objeto sumable son dos objetos sumables', que ya no tiene excepciones, aunque plantea el problema de determinar qué es un objeto sumable.

Lo que ocurre es que para que el simbolismo nos sirva, siempre que expresemos sintácticamente un problema del modo $x?\ 1+1=x$, debemos obtener dos como solución. Pero, para expresar un problema como $x?\ 1+1=x$, antes hemos de haber concluido que los objetos son sumables, que han sido añadidos, y que por lo tanto es pertinente hacer la suma para hallar la solución.

Aquellos lectores idealistas y con vocación matemática pueden probar su fe contra LAKATOS[10].

La mayoría de los diccionarios definen dos como uno y uno.

dos. Uno y uno.

---

[10] Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*.

Otras operaciones

Además la sintaxis es extensible, de modo que uno es libre de definir operaciones, y por ejemplo los matemáticos han definido, además de la suma, muchas otras, como por ejemplo: $1-1=0$ y $1\times 1=1$. Incluso es posible definir una operación, notada ⑨, tal que, siendo a y b los dos operandos, resulte que, $a ⑨ b = a+b+9$, así que, por ejemplo, $1 ⑨ 1 = 11$.

Así como la suma puede parecer una verdad universal, la suma con nueve desplazamientos, ⑨, parece un invento que tiene la única intención de confundir, porque, además, puede ser reducida a sumas. Pero, piénsese, por ejemplo, en la multiplicación. La multiplicación también puede ser reducida a sumas, y sin embargo se considera a la multiplicación una de las cuatro operaciones aritméticas básicas. Las dos únicas diferencias entre la multiplicación y la suma con nueve desplazamientos son:

- que la multiplicación es más útil, es decir, aparece con más frecuencia en problemas, y
- que la reducción de una multiplicación a sumas es más complicada, es decir, resulta en general en muchas más cantidades a sumar.

La multiplicación se presenta en problemas con tanta frecuencia que compensa idear atajos que eviten hacer las sumas y, por esto, los niños en las escuelas aprenden el algoritmo de la multiplicación y las calculadoras la incluyen en su repertorio de operaciones.

Pero es que la propia suma puede reducirse a una operación más simple. Como sabemos también desde niños, sumar puede reducirse a contar. Saber contar supone conocer cual es el número siguiente a cualquier número dado. Así sabemos que el número siguiente al 3 es el 4, lo que anotaremos $\mathcal{S}(3)=4$. Sumar 1 a cualquier número n es hallar el número siguiente a n. Expresado matemáticamente $1+n=\mathcal{S}(n)$. Y sumar m a n supone aplicar m veces $\mathcal{S}$ a partir de n:

$$m+n=\underbrace{\mathcal{S}(\mathcal{S}(\ldots\mathcal{S}}_{m \text{ veces}}(n)\cdots)).$$

Una de las virtudes de los simbolismos es su completa flexibilidad, de modo que se pueden definir sintaxis del modo que más convenga en cada circunstancia. Pero esto no significa que todas las sintaxis posibles sean igualmente útiles. La suma es, posiblemente, la operación más útil, siendo además la base sobre la que se han definido otras, como la multiplicación, que es una suma reiterada.

Que la suma sea extraordinariamente útil a las personas no significa que sea una verdad universal. Hacer lo útil al hombre igual a universal, es un error de perspectiva denominado homocentrismo.

No todos los simbolismos son igualmente útiles

Los simbolismos son extensibles, es decir, se pueden extender de modo que permitan la resolución más fácil de un mayor número de problemas. Esto supone que unas de sus partes son más fundamentales que las otras.

Por ejemplo, la aritmética de los números naturales es fundamental porque una gran parte de las matemáticas resulta de su extensión. Esto hace que los conceptos de la aritmética de los números naturales, como el $1 + 1 = 2$, sean tan útiles que es imposible alterarlos sin que muchos otros conceptos tengan que ser modificados. Por esta razón es mejor no alterarlos.

Algunas de las normas de los simbolismos son convencionales y otras quedan determinadas por las anteriores. Cualquier convención es posible, pero no son todas ellas igualmente útiles, y por lo tanto, si imponemos la condición de utilidad, algunas se impondrán y otras serán insostenibles. Lo que en último término importa es que el simbolismo sea útil, que permita solucionar problemas.

Como resulta imposible que cada hablante de un idioma explicite todas las convenciones que usa, la situación es, en la práctica, algo confusa (y, a veces, divertida). Las matemáticas intentan evitar esta dificultad (y, tal vez, la diversión), por lo que exigen que se haga explícita cada una de las convenciones usadas. A continuación veremos algunos ejemplos de extensión de la aritmética, que son algo técnicos aunque se ha procurado que las matemáticas utilizadas sean simples.

Sobre el cero

En el caso del infinito, se presentan varias maneras de extender el simbolismo matemático. Antes de investigar sobre el infinito, vamos a estudiar el cero. Cero e infinito están relacionados, y el cero es más manejable que el infinito, de modo que estudiando el cero podremos preparar el entendimiento del infinito.

El cero, escrito ‘0’, designa la nada. Luego el cero no se refiere a objeto alguno, o dicho de otro modo, el cero es un símbolo. Como tal admite diferentes interpretaciones. La primitiva se deriva de la interpretación de los números naturales como las representaciones de las cantidades. Si un número representa una cantidad de objetos de cierto tipo, el cero se usa cuando no hay objetos de ese tipo. Si un problema que usa esta interpretación de los números tiene como solución cero (0), significa que no hay ninguno. En otros casos el cero (0) es el valor de referencia, el origen. En este caso los números representan desviaciones, y una solución cero (0) significa que no hay desviación.

Desde el punto de vista de la resolución de problemas aritméticos, el 0 se hace necesario en cuanto se admite la resta como operación, ya que si no el problema $x?\ x = 1 - 1$ se quedaría sin solución. Pero una vez admitido el 0 como número, éste también debe poder aparecer en las sumas. Esto hace necesario definir el resultado de operaciones como $1 + 0$.

Sobre el infinito

Si el cero (0) aparecía con la resta, el infinito (∞) aparece con la división. Precisamente cuando el divisor es 0, $x?\ x = 1/0$.

El infinito (∞), como el cero (0), es un símbolo que admite tantas interpretaciones como los números. Así, si la solución de un problema es que se precisa una cantidad infinita de algo, entonces es que la cantidad necesaria es mayor que cualquier cantidad que se tenga. Si, por otro lado, los números representan desviaciones, entonces una solución ∞ significa que la desviación está siempre más allá de cualquier límite que impongamos.

Resulta que una solución 0 a un problema significa que, bien mirado, el problema no es tal, ya que o bien no se necesita ninguna cantidad adicional o bien la desviación respecto al objetivo ya es nula. En el caso de una solución ∞ la situación es la inversa, es decir, el problema no tiene solución, ya que es imposible conseguir la cantidad necesaria o la desviación está fuera de cualquier alcance.

Cantor

Queda por definir el resultado de las operaciones en las que aparece ∞. Sucede que $\forall a,\ a + 1 > a$, de manera que, aplicado a ∞, queda:

$$\infty + 1 > \infty.$$

CANTOR[11], en vez de extender al infinito esta verdad finita que establece que el número siguiente es siempre mayor que el anterior,

[11] Cantor, G. (1895, 1897): *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*

extendió otra verdad finita, a saber, que si dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos, entonces se pueden emparejar los elementos de uno y otro de tal suerte que ningún elemento se quede sin pareja.

Llamando $\mathbb{N}^1$ al conjunto de los números naturales sin el cero, es decir,

$$\mathbb{N}^1 = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

y $\mathbb{N}^0$ al conjunto de los números naturales con el cero,

$$\mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

CANTOR razonó que podía hacerse el emparejamiento completo de los elementos de ambos conjuntos, del siguiente modo. A cada número de $\mathbb{N}^0$ le corresponde en $\mathbb{N}^1$ el número siguiente, y viceversa, es decir, al 0 de $\mathbb{N}^0$ le corresponde el 1 de $\mathbb{N}^1$, al 1 el 2, al 2 el 3, y así sucesivamente.

$\mathbb{N}^0$	$\mathbb{N}^1$
0	1
1	2
2	3
3	4
$\vdots$	$\vdots$
n	$n+1$
$\vdots$	$\vdots$

Al no quedar sin pareja ningún número de $\mathbb{N}^0$, y tampoco ningún número de $\mathbb{N}^1$, CANTOR concluyó que ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Como quiera que $\mathbb{N}^1$ tiene ∞ elementos, y $\mathbb{N}^0$ tiene un elemento más, resulta que:

$$\infty + 1 = \infty.$$

Tenemos, al menos, dos posibles maneras de extender al infinito la aritmética finita; o bien $\infty + 1 > \infty$, o bien $\infty + 1 = \infty$. Interesará extender el simbolismo de aquel modo que permita solucionar los problemas más fácilmente y en mayor cantidad. Y si ambas fueran útiles, simplemente tendríamos que desdoblar el concepto de infinito y aplicar en cada caso el adecuado.

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$$

El cambio

La primera contienda filosófica, sostenida por los filósofos griegos más antiguos, se produjo por la aparente contradicción entre el cambio y la permanencia. Aquello que captan nuestros sentidos es mudable y, sin embargo, una vez que pensamos en ello se nos presenta inmutable. Así, mientras HERÁCLITO propugnaba que todo cambia, PARMÉNIDES mantenía lo contrario. ¿Quién merece más crédito?

Las simbolizaciones y los símbolos son permanentes, inmutables. Si no fijamos que $1+1=2$, entonces el simbolismo pierde su utilidad. Gracias a que $1+1=2$ es una verdad inmutable, podemos resolver los problemas que pueden expresarse como x? $1+1=x$.

La frase 'una margarita crece en tu jardín' describe un cambio pero puede ser escrita en piedra. El cambio principal es el captado por el verbo 'crecer', pero también la margarita y el jardín cambian. La simbolización consiste en la fijación de lo cambiante. Sobre el verbo recae la mayor carga de este proceso de fijación, pero no toda.

Una frase completa, con sujeto, verbo y complementos, cumple el requisito periodístico de informar en cada noticia sobre quién (sujeto), qué (verbo), cómo (adverbio), cuándo (tiempo verbal y complemento temporal) y por qué (complemento causal) ha sucedido. Ignoro si la gramática universal de CHOMSKY[12] prescribe que todos los idiomas deben acomodar estos elementos de un modo u otro, pero no me extrañaría dada la utilidad que tiene que el idioma fuerce, o sugiera, qué elementos de información conviene reseñar.

El verbo es el nucleo de la frase, la parte que no puede faltar. No puede faltar porque el verbo es la parte de la frase que explica, precisamente, qué ha sucedido, qué ha cambiado. Pero debemos ir más lejos. Cada frase describe un suceso, un fenómeno, un cambio que es especificado por el verbo. Que cada frase describa un cambio implica que aquello que no cambia no puede ser dicho. No necesita explicarse aquello que no cambia, de modo que no hay necesidad de decirlo.

La permanencia

Sin embargo hay verbos que no describen un cambio, sino una permanencia o persistencia. En castellano se trata, principalmente, del verbo *ser*. La frase 'la margarita *es* una flor de centro amarillo rodeado de pétalos blancos' no describe un cambio, sino una permanencia. En realidad, la frase anterior sirve para identificar las margaritas,

[12] Chomsky, N. (1989): *El conocimiento del lenguaje*.

es decir, explica que el nombre margarita se emplea para referirse a las soluciones de cierto problema. En otras ocasiones, como cuando se dice 'mi lápiz es rojo', sirve para definir mi lápiz añadiendo una condición a las condiciones que definen a los lápices en general.

Otros verbos, como estar o saber, describen estados. Los estados son resúmenes de sucesos. Por ejemplo, para estar aquí he tenido que venir hasta aquí. Luego los verbos de estado describen indirectamente sucesos.

Todas aquellas frases que sí se refieren a construcciones simbólicas, no describen cambios. Caben aquí las paradojas, como 'esta frase es falsa', pero también otras frases que sirven para extender el aparato simbólico de resolución, como las definiciones.

Todas aquellas frases que no se refieren a construcciones simbólicas, sí describen cambios. Aquí encontramos todas aquellas frases que describen el exterior, los llamados fenómenos.

El símbolo es el fenómeno fijado

Luego los conceptos de cambio y de permanencia nos permiten distinguir el mundo simbólico interior, que es inmutable, del mundo fenoménico exterior, que es cambiante. Por esto la frase de HERÁCLITO el oscuro que tanto me gusta repetir, "nada permanece excepto el cambio", es enormemente profunda y no es paradójica ni oscura, sino que se refiere, en la misma frase, tanto a lo interior como a lo exterior y explica, concisamente, que el símbolo es el fenómeno fijado.

Se trata de una traducción libre del fragmento 50 de BRUN[13] (que se corresponde con el 84a de DIELS y KRANZ), "*Μεταβάλλον ἀναπαύεται*". Más literalmente dice que "el fuego permanece en el cambio", y ya que para HERÁCLITO el fuego es el elemento primordial, "todas las cosas se cambian por el fuego y el fuego por todas las cosas, al igual que las mercancías se cambian por oro y el oro por las mercancías" (fragmento 49 (90 de DIELS)), también vale la traducción "todo permanece en el cambio".

Μεταβάλλον ἀναπαύεται

[13] Brun, J. (1965): *Heráclito*.

Zenón de Elea

Históricamente, la polémica sobre el cambio y la permanencia fue avivada por ZENÓN de Elea con sus aporías sobre el movimiento, la más famosa de las cuales puede ser la de Aquiles y la tortuga.

ZENÓN[14] demostró que el veloz Aquiles es incapaz de alcanzar a la lenta tortuga, siempre que la tortuga tenga alguna ventaja inicial. Porque cada vez que Aquiles llega al lugar en donde estaba la tortuga al principio del movimiento, ésta ya ha tenido tiempo para desplazarse algo más lejos, por lo que la tortuga se mantiene siempre por delante de Aquiles.

La aporía de Aquiles y la tortuga se supera admitiendo que una suma de infinitos términos puede tener un resultado finito. Las matemáticas, para quien tenga la disposición de seguirlas, son, en el caso de que la velocidad de Aquiles doble a la velocidad de la tortuga y donde la suma representa el tiempo que tarda Aquiles en alcanzar a la tortuga, como sigue.

Para cualquier número finito n se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Por ejemplo, si se suma $1/2 + 1/4 + 1/8$ se obtiene $7/8 = 1 - 1/8$. Esto significa que si tomamos valores muy grandes de n, entonces la suma será casi 1. De aquí que se diga que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.$$

El paso del caso finito al infinito no es una inferencia, sino una extensión del simbolismo que, de este modo, vence la aporía planteada por ZENÓN. Una vez que se demuestra la utilidad de una extensión, ésta se adopta y se toma por verdadera.

[14] Northrop, E.P. (1944): *Riddles in Mathematics.*

Esta verdad se inventó, que no descubrió, unos dos mil años después de que Zenón planteara sus aporías, de modo que las aporías estaban vigentes y eran recientes en los tiempos de Sócrates. Pues bien, a pesar del hecho experimental de que Aquiles adelanta efectivamente a la tortuga, con lo que Parménides queda refutado, Sócrates y sus discípulos Platón y Aristóteles desdeñaron por una razón ética a Heráclito, a los físicos jónicos y a los hábiles sofistas. Y aunque hoy nos pueda resultar inverosímil, negaron la evidencia e interpretaron las aporías de Zenón como prueba de que el movimiento no podía existir, es decir, como prueba de la validez de los postulados inmovilistas de Parménides.

Las consecuencias de esta postura ética han sido enormes. Al menospreciarse el fenómeno y el dato empírico, se frenó la ciencia entonces incipiente. Al ensalzarse la razón pura se impulsó la especulación escolástica, que era estéril por ser el reflejo de sí misma.

Es, por ello, un enorme contrasentido que Sócrates, una de las personas que más han influido en la historia, y que desterró el subjetivismo sofista durante dos mil años, fuera ajusticiado por sofista[15].

---

[15] Tovar, A. (1984): *Vida de Sócrates.*

Reflexiones subjetivistas sobre símbolos y explicaciones

El problema de la supervivencia

No hay problemas aislados. Por ejemplo, la solución de un problema de cálculo diferencial, para un determinado estudiante, puede ser abandonar la carrera de ingeniería para estudiar leyes. Quiero decir que cada problema es un subproblema de otro problema más general. Siguiendo con el ejemplo, conocer las leyes tampoco es el objetivo último, sino seguramente ser capaz de obtener ingresos como abogado. Y aunque en ocasiones lo pensemos, tampoco el dinero es lo último. Con el dinero puede conseguirse comida y cobijo, que contribuyen, ya sí, al objetivo final, que es vivir.

En el origen de todos nuestros problemas nos encontramos, siempre, el problema de vivir, que denominaremos *el problema de la supervivencia.* Esto nos parece claro en el caso de los organismos que, homocéntricamente, denominamos inferiores. En nuestro propio caso, podemos desdeñar hipócritamente el problema de la supervivencia y sustituirlo por otros más sublimes. Todos estos ideales sublimes son simbólicos: el Dios de la religión, el Amor de la poesía, el Progreso de la ciencia, el Saber de la filosofía, la Virtud de la ética, la Belleza del arte, el Poder de la política, la Justicia de la ley, el Valor de la milicia, la Patria del nacionalismo, la Raza, etc.

De otra forma. Si todavía queda gente que se niega a aceptar la explicación darwiniana, es porque ésta le obliga a aceptar que, en último término, lo que nos encontramos es el problema de la supervivencia y no sublimes ideales. Si usted, amable lector, se encuentra en dicho grupo, considerará que todo lo dicho en este libro es un puro sinsentido.

To be, or not to be — that is the question[16]

[16] Shakespeare, W. (*c.* 1601): *Hamlet.*

La vida

El cráneo protege al cerebro del mundo exterior, pero a la vez lo aísla. El cerebro no ve el exterior, sino que recibe información de los ojos. Y tampoco puede actuar sobre el exterior, sólo puede dar órdenes a los músculos para que éstos actúen.

Las percepciones no son neutras. Sentimos dolor al tocar algo demasiado caliente. Ésta es una información adicional que condensa un saber aprendido evolutivamente. Simplemente codifica el dato de que el calor excesivo mata. Como sabemos desde tiempos de DARWIN[17], esta codificación no la hizo ningún sujeto inteligente. Ocurre que disponer de este dato favorece la vida, de modo que los organismos que por algún azar lo codificaron genéticamente, sobrevivieron mejor y tuvieron una probabilidad mayor de alcanzar la madurez y de dejar descendencia que aquellos otros individuos más temerarios que eran insensibles al mucho calor. Lo más importante es que la prole de los primeros, al heredar esta prevención al calor excesivo, perpetuó la ventaja de sentir dolor.

Luego el cerebro recibe información valorada del exterior y envía al cuerpo información ejecutiva. Y esto debería ser todo, es decir, desde DESCARTES no deberíamos añadir ninguna otra información, ya que lo único cierto e indudable es el yo interior. Sin embargo el cerebro de las personas contiene otras informaciones que, como las sensaciones de dolor y de placer, también han sido codificadas a lo largo de la evolución. Por ejemplo, saber que el corazón ha de latir más rápidamente al estar corriendo para oxigenar mejor los músculos, es una información de este tipo. Este tipo de información pasa de padres a hijos a través de la herencia genética. También se hereda el aparato simbólico. Por contra, ningún conocimiento simbólico pasa genéticamente de padres a hijos. El idioma no se hereda, se aprende.

La vida es un proceso que, en determinadas circunstancias, se extiende y dura. Distinguiendo la vida de su entorno, ocurre que algunas reacciones del entorno benefician la vida y otras la perjudican. Además lo vivo actúa sobre su entorno exterior, de modo que nos encontramos con que la vida se encuentra en una situación análoga al cerebro, pero límite. Límite, porque la vida no cuenta con información adicional alguna. Lo único que tiene es la posibilidad de actuar y el hecho de que algunas reacciones del entorno son perjudiciales y otras beneficiosas.

---

[17] Darwin, Ch. (1859): *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life.*

La similitud entre la situación de la vida tomada como una entidad entera y la del cerebro de las personas no es casual.

El problema aparente

Abstrayendo los detalles físicos de la vida, que resultan irrelevantes en una investigación sobre el saber y el conocimiento, podemos quedarnos con que el problema aparente describe adecuadamente la situación epistemológica de la vida. Esto se resume en una frase: el problema de la supervivencia es un problema aparente.

En un *problema aparente* hay dos clases de reacciones, las buenas que son las deseadas y las malas que son el resto, y la solución del problema aparente es aquélla que sólo recibe reacciones buenas. Cada posible solución ejecuta acciones para intentar que las reacciones sean buenas, y no malas, pero sólo conoce la apariencia, esto es, las acciones y las reacciones, y nada sabe de lo que media desde las acciones hasta las reacciones, y aun desconoce si media algo o no. Hay libertad para elegir las acciones y la condición de que las reacciones sean buenas. Éste es el problema aparente.

La primera conclusión es que el problema aparente no tiene una solución definitiva, porque al quedar el exterior, que denominaremos universo, completamente indefinido, podría incluso ocurrir que las reacciones fueran siempre, e independientemente de todo, malas. Al no tener el problema aparente una solución definitiva, lo único que se puede hacer es definir resoluciones que, para cada vez más universos, obtengan una solución. Debe cuidarse la distinción entre solución y resolución; resolver es a buscar como solucionar a encontrar.

Si partimos de un *mecanismo*, esto es, un ente que aplica mecánicamente un único comportamiento a la resolución del problema aparente, podemos establecer que un *adaptador*, capaz de varios comportamientos que rige por un procedimiento de prueba y error, es potencialmente mejor resolutor que el mecanismo. El adaptador, al enfrentarse a un universo, va probando sus distintos comportamientos hasta dar con uno que obtiene buenas reacciones, esto es, hasta encontrar uno que soluciona el problema.

Y un *aprendiz*, capaz de varios comportamientos como el adaptador, pero que además dispone de una lógica interna en la que puede modelar y simular el comportamiento del universo exterior, mejora al adaptador, porque no tiene que sufrir las consecuencias de aplicar sus acciones para descubrir si las reacciones correspondientes son perjudiciales. Con el aprendiz aparece la modelación interna de lo externo.

Ingenieros

El problema aparente no tiene interés en ingeniería. Y no lo tendrá mientras el ingeniero sea capaz de modelar, aunque sea mínimamente, el entorno de funcionamiento de las máquinas que diseña. Teniendo alguna información sobre el entorno, lo más útil es usarla.

Cuando hay alguna incertidumbre en el entorno que se encontrará la máquina, el ingeniero diseña adaptadores, como los termostatos.

El conocedor simbólico

El mecanismo, el adaptador y el aprendiz realizan, cada uno, una única manera de resolver. En el caso del aprendiz, y ya que en su lógica interna pueden representarse comportamientos, se busca el comportamiento que represente y sustituya al universo exterior, pero no es posible representar problemas ni resoluciones.

Para que una lógica pueda representar problemas, soluciones y resoluciones ha de ser simbólica, esto es, ha de tener una sintaxis, que es donde están las expresiones simbólicas, y una semántica, en donde se encuentran las soluciones. Los problemas y las resoluciones son necesariamente sintácticos, porque la manera de expresar la libertad del problema es usar símbolos que no se refieran a solución concreta alguna, o sea, usar símbolos sin referente semántico que son, por ello, puros artefactos sintácticos. La resolución del problema simbólico consiste en la aplicación de un algoritmo de resolución que determine qué objeto conviene a la libertad del problema para que se satisfaga la condición. El objeto simbólico así determinado ha de referirse a un comportamiento que efectivamente pueda emplearse para solucionar el problema o, dicho de otro modo, las soluciones han de tener significado. En resumen, que así como los problemas y las resoluciones son objetos sintácticos, las soluciones son objetos semánticos.

El *conocedor simbólico* dispone de una lógica simbólica y en ella puede representarse, no sólo el comportamiento del exterior como el aprendiz, sino el problema de la supervivencia entero que él mismo intenta solucionar. Para que un resolutor pueda representarse a sí mismo, ha de disponer de una lógica que permita la expresión de resoluciones. Esto implica que el único tipo de resolutor que puede verse a sí mismo resolviendo es un conocedor simbólico. Sólo un conocedor simbólico puede ser un *sujeto*.

Reiteración

Sólo un conocedor simbólico puede ser un sujeto.

La lógica

Estamos utilizando el término lógica a la manera de WITTGENSTEIN[18], como la totalidad de lo posible. Esta totalidad incluye a todos los objetos posibles, a todas las relaciones posibles entre ellos, a todas sus posibles transformaciones y, en general, comprende todo lo imaginable, todo aquello que puede ser pensado.

Pero tal vez esto sea más fácil de entender al revés, es decir, explicando que la imaginación de cada individuo queda limitada por su lógica. Un aprendiz sólo puede pensar comportamientos. Un conocedor simbólico puede pensar problemas, soluciones y resoluciones. Ya que la condición de un problema puede ser un comportamiento, la lógica del conocedor simbólico es más expresiva que la del aprendiz, y la incluye. Esto requiere más explicaciones.

Si intento atravesar una pared, me hago daño y no lo consigo. Ésta es una creencia fuertemente asentada, o sea, una verdad. De modo que cuando quiero ir a algún lugar busco caminos que no requieran atravesar paredes. Ahora voy a decir lo mismo, pero introduciendo algunos conceptos. Mi realidad, que es el modelo que yo tengo del exterior, incluye la imposibilidad de atravesar paredes, de modo que cuando me planteo un problema, por ejemplo cómo llegar a la cocina, uso la realidad como condición. Ya que no puedo atravesar las paredes, en lugar de ir en línea recta, voy por el pasillo.

El problema es, como concepto, más general que el comportamiento, porque un problema puede incluir un comportamiento, pero un comportamiento no puede incluir un problema. La condición del problema puede ser un determinado comportamiento, por ejemplo el comportamiento de las paredes. Un comportamiento no es un problema. Un comportamiento no tiene ningún grado de libertad, no se cuestiona, por lo que no es, ni puede ser, un problema.

5.61 Die Logik erfüllt die Welt

[18] Wittgenstein, L. (1922): *Tractatus Logico-Philosophicus.*

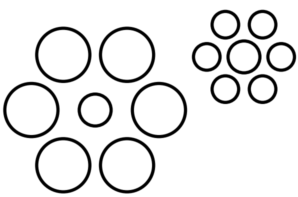
Los organismos

Una organización compuesta por pocas personas que se ven a diario, como una familia, suele necesitar poco aparato administrativo, o ninguno. A medida que aumenta el tamaño de la organización, también se incrementan los recursos necesarios para mantener la coherencia de la organización. La organización debe enfrentarse a los problemas como una unidad, a pesar de estar formada por muchos miembros individuales.

Para que cada miembro reciba información suficiente, deben establecerse cauces de información, tanto referente a la situación como a los objetivos. Además es preciso fijar reglas que establezcan las responsabilidades de cada uno, y así evitar que dos miembros de la organización tomen decisiones opuestas. Cuando la organización es muy grande, por ejemplo del tamaño de un estado, el número de reglas es enorme, y la cantidad de recursos dedicados a la administración es una fracción importante del total.

Otros rasgos de los organismos complejos son la especialización y la jerarquización. La especialización permite que cada individuo realice una tarea concreta con toda su dedicación, de modo que su habilidad en esta función es mayor que si tuviera que diversificar su actividad. La jerarquía es una manera eficaz de mantener la unidad del conjunto. Si la actuación de dos individuos colisiona de algún modo, se puede recurrir al nivel superior, para arbitrar una solución. Cuando el organismo es grande, puede haber varios niveles jerárquicos. La persona es un organismo complejo que está organizado jerárquicamente para así procurarse un comportamiento unitario.

La persona es un individuo y es, a la vez, un organismo complejo. Lo primero interesa a la ética, lo segundo a la epistemología.



Los círculos centrales son iguales

¿Por qué nos gobernamos por símbolos?

La persona es un organismo complejo que está organizado jerárquicamente para así procurarse un comportamiento unitario. El nivel superior de la jerarquía es simbólico, porque es más general. Sólo un resolutor *simbólico* del problema aparente de la supervivencia puede tener una representación completa de la situación, situación que incluye al problema y al propio resolutor.

Pero también es posible describir lo que ocurre de una manera menos racional. Sucede, simplemente, que hemos conseguido sobrevivir con un nivel jerárquico superior que es simbólico. Entender el mundo como un problema nos permite sobrevivir. Cuando el nivel superior de un organismo es simbólico, se denomina consciencia. Esto es una mera definición.

No se está diciendo que sea mejor (¿para qué?) poder representarse problemas, ni que ello redunde en una vida más feliz. Tal vez sí. Lo que sí es cierto es que sólo teniendo un conocimiento simbólico podemos representarnos a nosotros mismos como resolutores del problema de la supervivencia. Y que sólo los conocedores simbólicos nos podemos preguntar por qué nos gobernamos por símbolos.

La habitación china

Suponga que usted no sabe una palabra de chino. Suponga que no sabe nada de papiroflexia. Suponga que lo encierran en una habitación y le piden que por cada hoja de papel que le pasen, devuelva otra hoja escrita por usted a partir de la primera, pero siguiendo unas instrucciones muy precisas escritas en castellano. Suponga que merced a esas instrucciones sus respuestas resulten ser atinadas respuestas escritas en chino a las preguntas sobre papiroflexia, también en chino, que están escritas en los papeles que recibe, aunque esto lo ignora usted. Suponga que alcanza usted tal destreza siguiendo las instrucciones, que el tiempo que tarda en preparar sus respuestas es el mismo que el que emplearía un hábil calígrafo chino. Es decir, que desde fuera de la habitación, se diría que dentro se encuentra un experto chino en papiroflexia respondiendo a las preguntas.

SEARLE[19] propone una situación similar a ésta, con la que intenta colocarle a usted en la situación de una computadora, para demostrar que la inteligencia no está en el tratamiento automático de los símbolos, como había propuesto TURING[20]. SEARLE tiene razón.

---

[19] Searle, J.R. (1980): *Minds, Brains, and Programs.*

[20] Turing, A.M. (1950): *Computing Machinery and Intelligence.*

Aunque desde fuera parezca que usted sabe papiroflexia, y hasta chino, nosotros sabemos que usted no es capaz de saber el significado de ninguna de las palabras que escribe.

La inteligencia

Una calculadora no es inteligente. Una calculadora sólo sirve, como tal, a alguien inteligente. Recuérdese que la calculadora sólo ayuda a sumar a quien ya sabe sumar.

Una computadora puede ser inteligente, por ejemplo, jugando al ajedrez. Lo es, en ese caso, porque se enfrenta a un problema, cómo ganar la partida. Pero incluso a algunas personas les parecerá que no lo es. Argüirán que la computadora no sabe, en realidad, jugar al ajedrez. Explicarán que si en aquella jugada decisiva la computadora jugó brillantemente el caballo, no fue porque tenga una visión global del juego, sino porque la función de evaluación que usa, dada aquella situación del tablero, devuelve automáticamente como resultado el movimiento del caballo.

Es cierto que la computadora, por ser obra de personas, puede estudiarse hasta determinar exactamente por qué hizo en cada momento la jugada que hizo. Es cierto, también, que la manera de jugar y la toma de decisiones de una computadora puede ser muy diferente de la de una persona.

La primera objeción se fundamenta en una limitación de nuestra especie, *homo sapiens*, que es consecuencia de su diseño, evolutivo y no planeado. Las personas no somos completamente conscientes de las causas de nuestros actos.

La consciencia es sólo la capa superior, aún muy frágil y delicada, de nuestro aparato cognitivo. Hasta Freud[21] no se tuvo conocimiento de este hecho, pero ahora se conocen datos que lo confirman (véase, a continuación, la sección sobre “Cerebros partidos”).

Respecto a si la forma de resolver de la computadora es tan diferente de la nuestra que no se puede considerar inteligente, nos topamos con una cuestión de definiciones que, como sabemos, es meramente convencional. Si convenimos que volar es surcar los aires como las aves, entonces los aviones no vuelan. Si convenimos que inteligencia es la manera de resolver los problemas de las personas, entonces sólo las personas piensan.

Aquí definimos la inteligencia como la capacidad de resolver problemas.

[21] Freud, S. (1900): *La interpretación de los sueños*.

Cerebros partidos

La corteza cerebral está dividida en dos hemisferios comunicados, principalmente, a través del llamado *corpus callosum*. Uno de los tratamientos de la epilepsia más grave consistió en cortar el cuerpo calloso con la intención de que los ataques epilépticos no se propagasen de uno a otro hemisferio. Las operaciones, realizadas en los años 60 en California y en los años 70 en la costa Este de los Estados Unidos, fueron consideradas un éxito clínico por la disminución obtenida en la severidad de los ataques, sin merma observable en la capacidad intelectual de los pacientes.

La aparente normalidad intelectual de los pacientes es sorprendente. Se debe, en parte, a que el tronco cerebral, que proporciona las funciones más básicas, como por ejemplo la del despertar, no queda dividido, y en parte a que en circunstancias normales los dos hemisferios reciben la misma información. Sin embargo Sperry y sus colaboradores desarrollaron técnicas que permiten controlar la información que llega a cada uno de los hemisferios, obteniendo resultados muy interesantes. El resultado más general es que el hemisferio izquierdo de los adultos diestros, que es quien controla el lado derecho del cuerpo, es el único capaz de hablar.

Churchland[22] resume estos resultados. Uno significativo es el siguiente: se hace que el hemisferio derecho de un paciente vea una escena nevada y el izquierdo la pata de una gallina y se le pide que seleccione, de entre una serie de ellos y con sus dos manos, objetos relacionados. El paciente selecciona con la mano izquierda una pala para quitar la nieve y con la mano derecha la cabeza de una gallina. Terminado el ejercicio, la información llega a ambos hemisferios y se le pide al paciente que explique su elección. Éste contesta que obviamente la cabeza de la gallina va con la pata de la gallina, y que la pala es necesaria para limpiar el gallinero.

El paciente entiende la operación que ha sufrido y la prueba realizada, y sin embargo insiste en su explicación. Como situaciones parecidas se repiten, y no hay evidencia alguna de que los pacientes intenten conscientemente engañar, cabe suponer que lo que ocurre es que el hemisferio izquierdo, que controla el habla y la consciencia, ha integrado del modo más natural los datos con los que cuenta y con ellos ha elaborado su explicación. Esta racionalización, urdida por las capas superiores del hemisferio izquierdo, es considerada por el sujeto

[22] Churchland, P.S. (1986): *Neurophilosophy: Toward a Unified Science of the Mind/Brain*.

como su propia voluntad, y por tanto no está sujeta a discusión por más evidencias que se le muestren.

Esto, aunque a primera vista pueda parecer extraño, seguramente es lo normal. Nuestras explicaciones de nuestros propios actos son también racionalizaciones[23]. Tienen que serlo porque no es posible que al sustrato simbólico consciente del cerebro le llegue toda la información producida por el cerebro, de modo que sólo le pueden llegar informaciones parciales.

La computadora y la mosca

¿Se puede comparar la inteligencia de una mosca con la de una computadora? La principal dificultad para efectuar esta comparación es que la mosca se enfrenta directamente al problema de la supervivencia, mientras que la computadora no se enfrenta a problema alguno, sino que sirve como ayuda simbólica a la resolución de problemas.

Pero tampoco el hecho de enfrentarse al mismo problema supone que la comparación pueda hacerse sin mayores complicaciones. Por ejemplo, que haya más moscas que personas puede indicar que las moscas han solucionado mejor que las personas el problema de la supervivencia y, sin embargo, pocas personas estarían dispuestas a considerarse menos inteligentes que una mosca.

En cuestiones importantes es más inteligente una mosca que huye en cuanto nos acercamos con perversas intenciones, que la computadora capaz de jugar al ajedrez mejor que nosotros, pero que reacciona del mismo modo a nuestra sonrisa que a un ataque con martillo (no reacciona en ninguno de estos casos). Sin embargo, nos impresiona más la inteligencia de la computadora capaz de ganar al campeón del mundo de ajedrez.

En general, la inteligencia se asocia con la capacidad para resolver problemas. Como nuestro razonamiento consciente es simbólico, valoramos más la inútil, por sí misma, inteligencia simbólica de la computadora que la más simple inteligencia autónoma de la mosca.

La rana y la mosca

La rana tiene un sistema nervioso muy primitivo. Sólo es capaz de distinguir cosas pequeñas que se mueven con rapidez, que llamaremos moscas pero que pueden ser también otros tipos de insectos y animales pequeños, y cosas grandes que se mueven despacio, que llamaremos genéricamente predadores.

[23] Gazzaniga, M.S. (1998): *The Mind's Past*.

Una rana puede comerse una mosca, pero una mosca no puede comerse una rana, y sin embargo, hay más moscas que ranas. Las ranas y las moscas resuelven su problema de la supervivencia de diferente modo. Las ranas y las moscas tienen inteligencias distintas.

¿Qué soy yo?

L'État, c'est moi

"El estado soy yo", declaró el rey Luis XIV de Francia. Pero, ¿qué soy yo? Mi pierna derecha no soy yo, porque hay a quien le amputan su pierna derecha y no deja de ser él. Y, sin embargo, hay quien pierde a un hijo y, a muchos efectos, deja de ser él. Voy a responder con precisión a la pregunta ¿qué soy yo?, pero antes es necesaria alguna preparación (quien algo quiere, algo le cuesta).

Si fuera malabarista, antes de conseguir realizar con éxito este ejercicio, fracasaría un par de veces para subrayar su dificultad.

Primer fracaso

El yo no puede ser un modelo de la persona. De serlo ocurriría una regresión infinita: la persona tiene un modelo del universo en el que está el modelo de la propia persona que tiene un modelo del universo en el que está el modelo de la propia persona que tiene un modelo del universo, etc.

Segundo fracaso

El yo no puede ser una cosa. El cuerpo del sujeto no es el yo. Yo soy libre, tengo voluntad propia. Mi cuerpo actúa según mi voluntad. El yo es, por tanto, libertad y voluntad. El yo no puede ser visto, ni oido, ni tocado. No sabe, ni huele.

La consciencia

La persona es un organismo complejo cuyo objetivo es solucionar el problema de la supervivencia. Está organizado jerárquicamente, de modo que al nivel superior, que es la consciencia simbólica, sólo llegan los problemas más importantes, y que no pueden ser solucionados en los niveles inferiores. La tarea de la atención es asegurar que en la consciencia sólo se encuentra, en un momento dado, un único problema. La tarea de la consciencia es solucionar el problema que le va llegando sin que ello suponga que los problemas previamente solucionados se queden sin solución. Veamos esto.

Supongamos que he aprendido que cuando tengo sed, lo mejor es beber agua. Y supongamos que posteriormente, en cierto momento, descubro que el agua con cierto olor característico sabe muy mal. Las soluciones al nuevo problema son varias. Una drástica consiste en no tomar agua, de ningún tipo, pero esta solución interfiere con otra anterior, aquélla merced a la cual cuando tengo sed tomo agua. Otras soluciones menos drásticas consisten en no tomar agua si huele de ese modo o en probar con prevención cualquier líquido con ese olor.

La consciencia convierte la secuencia de problemas que la atención le va presentando en un único problema. Lo hace por acumulación de condiciones, y de este modo la solución del último problema es también solución de todos los problemas anteriores.

Supongamos que quiere comprarse un coche, y que a usted le gustan los deportivos. Su problema es entonces elegir un coche deportivo. Pero supongamos que su marido, al enterarse de sus planes, le diga que le gustan los coches rojos. Ahora el problema consiste en elegir un coche deportivo y rojo, ya que la solución de este nuevo problema es también solución del primero.

El peligro de este método es que la acumulación de condiciones puede hacer que el problema resultante se quede sin solución. Siguiendo con el ejemplo, podría ser que una tercera condición, como el dinero disponible, le dejara a usted sin coche, al no haber coches deportivos, rojos y baratos.

El conocimiento es, básicamente, acumulativo. Cuando conozco una nueva ciudad y sus playas, este conocimiento no sustituye a otros, sino que se añade a los conocimientos que ya tenía, y de este modo no interfiere con los problemas previamente solucionados, o sea, no interfiere con lo que ya sé.

Yo

La unidad de la persona se consigue en dos pasos. Primero la atención consigue que, en un momento dado, sólo ocupe la consciencia un problema. Segundo, la consciencia convierte la secuencia de problemas que la atención le va presentando en un único problema. Llamamos *problema del sujeto* a este único problema que va definiendo la consciencia simbólica del sujeto. El problema del sujeto es la representación simbólica consciente del problema de la supervivencia. El yo es la solución del problema del sujeto.

El problema del sujeto tiene una peculiaridad, a saber, que es un problema en continua redefinición. Cada vez que la atención se centra en un nuevo problema, la consciencia intenta expresar el nuevo problema como una condición adicional del problema del sujeto. Esto consigue que el comportamiento que soluciona el nuevo problema no deje sin solución a los problemas que llegaron antes a la consciencia.

La continua redefinición del problema del sujeto obliga, en consecuencia, a una continua redefinición de su solución, esto es, del yo. El comportamiento consciente de la persona, en cada momento, resulta de la solución que en ese instante encuentra a su problema del sujeto: "por sus obras los conoceréis". Sin embargo, para el propio sujeto, no es la información de los comportamientos pasados lo que marca sus comportamientos futuros, sino cómo queda reformulado su problema del sujeto. Porque es de éste, con las condiciones adicionales que se encuentre en el futuro, de donde resultarán los comportamientos posteriores. Por esta razón tiene sentido usar el problema del sujeto para referirse perifrásticamente a su solución, que es el yo, y no tiene sentido identificar el yo con el comportamiento consciente del sujeto, aunque éste sea su solución actual.

Esto puede explicar que, tal vez, lo que a los ciudadanos nos parece un cambio de comportamiento innoble, al político le resulte natural. 'Yo sigo siendo el mismo, es el mundo quien ha cambiado'. Los cuidadanos observamos su comportamiento, pero desconocemos su problema, y por esta razón "las apariencias engañan".

El *yo* es la solución del problema que, al resolverse, determina el comportamiento consciente del sujeto, pero no cristaliza como comportamiento, sino que permanece definido como problema. Por esto, el yo es libertad condicionada, siendo los valores y las creencias las condiciones que lo definen por delimitación. Mi yo me representa, pero no es mi modelo, porque yo soy la libertad, la incógnita, de mi versión simbólica y consciente del problema de la supervivencia. ¿Qué soy yo? Yo soy libertad para no morir.

Yo soy libertad para no morir

Creencias y valores

Como la acumulación de condiciones puede dejar al problema del sujeto sin solución, existen medios para evitarla. Uno consiste, simplemente, en establecer condiciones sobre las propias condiciones. Por ejemplo, el problema de cómo ir a la playa tiene distintas condiciones dependiendo de la ciudad en donde me encuentre, lo cual quiere decir que hay una condición de rango superior que es la que establece qué condiciones son pertinentes.

Las definiciones pueden simplificar las explicaciones, de modo que introduciremos dos. Llamaremos creencias a las condiciones de orden inferior que definen el problema, simbólico, del sujeto. Así, la impenetrabilidad de las paredes es una de mis creencias. A las condiciones de orden superior, que son condiciones de condiciones, las denominaremos valores. Por esto, cuando veo una película de fantasmas, cambio mis valores y me creo que las paredes pueden ser atravesadas.

El lenguaje del pensamiento

Con esta organización del sujeto, la comunicación más eficiente entre sujetos se consigue comunicando aquello que alcanza la consciencia y utilizando la misma sintaxis que utiliza la consciencia del sujeto. Las razones son dos, a saber, que los problemas, soluciones y resoluciones más importantes para el sujeto son aquéllos que alcanzan la consciencia, que es su nivel jerárquico superior, y que usar la misma sintaxis evita una traducción.

El sujeto

Un sujeto es un conocedor simbólico capaz de enfrentarse a un problema de la supervivencia complejo. Para ello dispone de una estructura de resolución jerárquica a cuya cúspide denominamos consciencia. El objetivo de la consciencia es dar unidad al sujeto. Por esto, aunque el sujeto tiene un pensamiento básicamente paralelo, únicamente tiene consciencia de una secuencia simbólica de pensamiento. La herramienta de la consciencia es el yo.

El subjetivismo parte del sujeto, porque sólo el sujeto es capaz de conocer, de preguntarse por qué, pero va más allá. El sujeto es la atalaya desde la que se puede ver la totalidad del territorio, pero no es todo el territorio.

¿Qué vale como explicación?

Si llueve, entonces se moja el suelo. Por esto decimos que la lluvia es una condición suficiente para que el suelo esté mojado. Pero hay otras: si se riega, también se moja el suelo. Es necesario, pero no suficiente, que no llueva para que el suelo esté seco. También es necesario que no se haya regado.

Con estos datos elaboramos el siguiente algoritmo de resolución. Cuando vamos a salir de casa, observamos el suelo de la calle para determinar si debemos tomar el paraguas o no. Éste es el problema. Si el suelo está seco, entonces sabemos que no llueve y que, por lo tanto, no es necesario el paraguas. Si está mojado, entonces hemos de confirmar si llueve, para tomar en este caso el paraguas, o si acaban de regar para no tomarlo.

Las causas son las condiciones suficientes para que ocurra el efecto. La explicación causal es aquélla que usa causas y efectos, de tal suerte que las causas sirven como explicación de los efectos. Luego, si queremos saber por qué está mojado el suelo, y descubrimos que está lloviendo, explicamos que el suelo está mojado porque está lloviendo. Esta explicación causal pide, a su vez, otra explicación, por qué llueve, de modo que la lluvia no es la explicación final del suelo mojado. Pero, en este caso, como en la totalidad de los casos prácticos, no se busca la explicación final. Y es que si el problema consiste en determinar si debemos, o no, tomar el paraguas, saber que llueve es suficiente para tomarlo, según el algoritmo que acabamos de ver.

La explicación final

Aunque en la práctica es suficiente aquella explicación que nos permite solucionar el problema que se nos plantea, el hecho de que las explicaciones sean artefactos simbólicos implica que podemos preguntarnos el porqué de cada explicación sin encontrar nunca una explicación final, o causa primera, que no admita una explicación ulterior, que no tenga una causa previa.

Hay quien dice que tal secuencia inacabable de explicaciones no es posible, que consiguientemente ha de haber una explicación final, y que tal causa primera es Dios, cuya existencia queda así probada. Pero el argumento es falaz. En un diccionario no existen palabras que no puedan ser explicadas con otras palabras.

Y, sin embargo, ya que existe un problema primero del que se derivan todos los demás problemas, sí que podría existir una explicación final. La explicación final sería aquélla que sirviera para solucionar el problema primero, o sea, el problema aparente de la supervivencia. Lamentablemente los problemas aparentes no tienen solución.

Así que lo último no es una explicación, sino un problema. O lo primero, según se mire.

La existencia

Caballo es un nombre común, como piedra. Esto quiere decir que caballo es el nombre que reciben las soluciones de cierto problema que fija las condiciones que debe cumplir una cosa para ser denominada caballo. Los simbolismos permiten asignar nombres a cualquier construcción simbólica y permiten combinar cualesquiera condiciones. Así, añadiendo la condición de tener un único cuerno en el centro de su frente a la definición de caballo, tenemos la definición del unicornio.

Decimos que los unicornios no existen porque no hay ningún animal que cumpla tal definición. Que haya nombres sin referente no es una limitación del simbolismo, sino su virtud. Recordemos que para representar la libertad de un problema se usan nombres sin referente. Así, tiene interés conocer si un determinado nombre tiene, o no tiene, referente. Y por esta razón decimos que existe aquello que tiene referente, y que no existe aquello que no lo tiene.

¿Qué pruebas de la existencia son suficientes? Aquéllas que nos permitan solucionar el problema al que nos estemos enfrentando en ese preciso momento. Si quisiéramos colocarnos en un plano absoluto, olvidándonos del problema, entonces nunca encontraríamos pruebas suficientes, dada la naturaleza simbólica de las pruebas.

Je pense donc je suis
Cogito ergo sum[24]

[24] Descartes, R. (1637, 41): *Discurso del método, Meditaciones metafísicas.*

¿Existe este libro?

En general damos por hecho que los objetos materiales, como este libro, existen. Aceptamos como prueba, en condiciones normales, la proporcionada por nuestros sentidos. Esto es así porque los objetos físicos suelen ser útiles o herramientas o, por el contrario, impedimentos o condicionantes en nuestros problemas. Sin embargo, DESCARTES argumentó que nuestros sentidos pueden sufrir ilusiones, por lo que no son siempre fiables, y concluyó que lo único indubitable era la existencia del yo.

¿Existo yo?

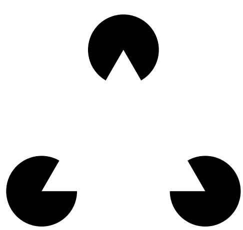
DESCARTES estaba en lo cierto. Para el sujeto el yo es la solución del problema de la supervivencia. Negar el yo sería negar el problema primero. Que finalmente muramos, o sea, que el problema de la supervivencia no tenga solución, no impide que seamos resolutores del problema de la supervivencia, es decir, no evita que busquemos la solución. Por el contrario, si el problema de la supervivencia tuviera solución, entonces no seríamos resolutores, sino soluciones.

¿Existe España?

Siempre que le solucione algún problema a alguien o, por el contrario, mientras sea un impedimento o condicionante a alguno, existirá España. Nótese que Mesopotamia también existe, según estos principios, para los arqueólogos.

¿Existe Dios?

Este asunto se deja como ejercicio al lector.



No hay triángulo

El conocimiento

Sabemos que el nivel jerárquico superior de control en las personas, que denominamos consciencia, es simbólico. Llamamos conocimiento o saber a la información consciente, que es simbólica.

No toda la información que trata y maneja nuestro cerebro es conocimiento. Según un ejemplo ya visto, el control de la frecuencia de latido del corazón, efectuado por el cerebro, no es consciente y, por consiguiente, no es conocimiento según nuestra definición.

El absolutismo

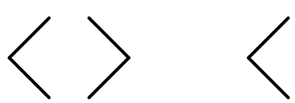
Es difícil fijar los límites del conocimiento, ya que, por definición, no es posible considerar conscientemente aquello que no se puede saber. Por esta razón parece que todo puede ser sabido. Llamaremos absolutismo a esta creencia en la posibilidad de un conocimiento completo.

Por ejemplo, y contra lo dicho antes, los mecanismos de control de la frecuencia de latido del corazón pueden ser conocidos, y lo son, por los estudiosos de la medicina. Pero no es lo mismo conocer el mecanismo de control que ejercer efectivamente un control consciente sobre la frecuencia del latido. Los absolutistas pueden alegar, no obstante, que hay quien puede, incluso, llegar a tener ese control consciente del corazón.

Otro ejemplo es el diccionario, que parece ser capaz de definir todas y cada una de las palabras de la lengua.

Hawking

HAWKING[25] es absolutista. Cree posible enunciar una teoría unificada que dé cuenta de todo cuanto acontece. Opina, además, que seguramente sólo existe una teoría que salve los hechos y sea coherente. De ser así, concluye, Dios no habría tenido ninguna libertad en la creación del universo. Ni tan siquiera para establecer las condiciones iniciales.



**Los vértices laterales
son equidistantes del central**

[25] Hawking, S.W. (1988): *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros.*

Penrose

PENROSE[26], además de coincidir con HAWKING, expone que el razonamiento deductivo formal no puede ser completo, según el teorema de indecidibilidad de GÖDEL, pero que es notorio que existen máquinas capaces de ir más lejos, a saber, cualquier cerebro que siga el teorema de GÖDEL, por lo que infiere que existe una lógica más poderosa que las matemáticas que, aventura, podría ser aquélla que se esconde tras las paradojas cuánticas.

Es decir, PENROSE reconoce que es imposible alcanzar el conocimiento completo en un simbolismo y, en vez de aceptar esta limitación, la aporta como prueba de la existencia de un metasimbolismo. Si este metasimbolismo cuántico fuera completo, entonces podría justificarse el absolutismo.

Refutación del absolutismo

¿Cómo rebatir el absolutismo con toda esta evidencia a su favor?

Lo primero es admitir que no hay cosa alguna que no pueda ser explicada. Todo puede ser, efectivamente, explicado. Sabemos que los simbolismos son sistemas cerrados, y por lo tanto, ilimitados, ya que es posible permanecer en ellos cuanto se quiera. La cuestión es que no tiene interés permanecer indefinidamente en ellos. No tiene sentido quedarse por siempre en el simbolismo, porque el simbolismo es un medio, una herramienta, y no un fin en sí mismo.

Un pianista de extraordinaria técnica puede preferir tocar una pieza de enorme dificultad, para mostrar así toda su habilidad, a interpretar otra más sencilla, aunque ésta última tenga un mayor valor musical. Esto es una perversión musical, ya que la técnica es un medio y no un fin, en la que el oyente sale perdiendo. Las exhibiciones circenses pueden ser muy entretenidas, pero no debe confundirse el tocino con la velocidad.

El simbolismo es una herramienta para resolver problemas. Las herramientas sólo deben ser usadas para realizar aquellas tareas para las que son útiles. Y, sobre todo, una vez concluida la tarea para la cual la herramienta ayuda, debe guardarse la herramienta, porque, a partir de entonces, sólo estorba. En el caso del simbolismo, quedarse por siempre en el simbolismo es lo que ocurre con una paradoja como 'esta frase es falsa' que si es verdadera, entonces es falsa, y entonces es verdadera, y entonces es falsa, etc.

---

[26] Penrose, R. (1989): *The Emperor's New Mind. Concerning Computers, Minds, and The Laws of Physics.*

Dicho de otro modo. Que podamos vivir sin que las paradojas nos causen dificultades no prueba la existencia de un metasimbolismo ignoto, sino que el conocimiento es un medio y que no es absoluto. El simbolismo es sólo un medio y, en consecuencia, el conocimiento es un medio, no un fin.

Las expresiones simbólicas pueden no tener significado. Estas explicaciones vacías de significado, paradójicas, son falso conocimiento, ya que no aportan información, aunque lo parezca. Por lo tanto, todo puede ser explicado, pero no toda explicación contiene conocimiento.

El escepticismo

Así como el absolutismo es optimista con respecto a la posibilidad del conocimiento, el escepticismo es pesimista.

HUME[27] enuncia con claridad el problema. La regla de la inferencia postula que, si algo ha ocurrido cada día hasta hoy, entonces también ocurrirá mañana. Merced a ella, podemos hacer inferencias racionales, por ejemplo, predecir que mañana saldrá el sol porque todas las mañanas, hasta hoy, ha salido el sol por el levante. Sin embargo, la propia operación de inferir no es racional, o mejor dicho, no puede ser fundada racionalmente. No puede fundarse en hechos, como que el sol sale todos los días, porque incurriríamos en un círculo vicioso.

Popper

POPPER[28] actualizó el pensamiento de HUME afirmando que una teoría puede ser refutada por un hecho que la falsee, pero que una teoría nunca, por más evidencia que acumule, puede ser verificada por los hechos. Es decir, que, si un día no saliera el sol, entonces la teoría de que todos los días sale el sol quedaría refutada, pero que haya salido el sol cada día no asegura que saldrá mañana.

POPPER deja abierta la posibilidad de un absolutismo asintótico, ya que una teoría puede acumular cada vez más evidencia, hasta hacerse casi completamente cierta.

Estamos usando el término *teoría* como una red de conceptos relacionados. Los conceptos son los elementos de la teoría. Tanto los conceptos como las teorías son construcciones simbólicas y, dada

---

[27] Hume, D. (1748, 1777): *An Enquiry concerning Human Understanding.*

[28] Popper, K.R. (1972): *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico.*

la naturaleza de los simbolismos, tanto una teoría como un concepto pueden ser designados por una palabra que le sirve de etiqueta. Un hecho sería un concepto independiente de cualquier teoría, es decir, absoluto.

Kuhn

KUHN[29] distingue, en el progreso de la ciencia, períodos normales en los que se desarrollan los aspectos secundarios de las teorías, y períodos revolucionarios en los que sobreviene un cambio de teoría, o de paradigma si utilizamos su terminología. Observa que ninguna teoría es en la práctica refutada por hechos que la falsean, esto es, por contrajemplos, sino que es refutada solamente cuando aparece otra teoría que es capaz de explicar estos contraejemplos.

Feyerabend

Para FEYERABEND[30] la diferencia entre hechos y teoría no es tan nítida como parece, e incluso piensa que no hay tal diferencia. Por ejemplo, la teoría de que el sol sale cada día da por supuesto que el día y la salida del sol son dos hechos puros, no teñidos de teoría, independientes. Pero no es así. Se puede decir tanto que un día no salió el sol como que un día duró cuarenta y ocho horas. La primera manera de decir refuta la teoría de que el sol sale cada día, pero no la segunda.

Tras descubrir que no hay hechos puros, esto es, hechos independientes de las teorías, FEYERABEND concluye que no existe una manera racional de determinar qué teoría es mejor. Las teorías son inconmesurables ya que cada una explica sus propios hechos.

Refutación del escepticismo

Es cierto que no existen los hechos como conceptos absolutos, tal como han descubierto KUHN y, sobre todo, FEYERABEND, que llega a afirmar que todo vale para conseguir que triunfe una teoría, repitiendo así a los sofistas. Pero esta última posición escéptica ya no se sostiene.

A pesar de que la postura escéptica se oponga a la absolutista, su defecto es básicamente el mismo. La teoría científica no es más que una explicación simbólica, y como tal no es un fin es sí misma, sino

[29] Kuhn, Th.S. (1970): *The Structure of Scientific Revolutions.*

[30] Feyerabend, P. (1988): *Against Method.*

un medio para resolver problemas y, en último término, el problema de la supervivencia.

Teóricamente se puede conceder prioridad a la mecánica relativista sobre la mecánica clásica, porque la mecánica relativista es capaz de fijar los límites dentro de los cuales es seguro utilizar la mecánica clásica, pero no a la inversa. Pero la mecánica clásica de Newton sigue siendo utilizada. Sus matemáticas son más sencillas que las de la mecánica relativista de Einstein, de modo que, cuando en el problema a resolver las velocidades son mucho menores que la velocidad de la luz, es más útil la mecánica clásica que la relativista. Luego, en la resolución de problemas prácticos, la mecánica newtoniana sigue viva, aunque haya de recurrirse a la mecánica einsteniana para certificar su validez.

No se trata de determinar si el concepto de simultaneidad o de masa de Newton es erróneo o no, sino de dilucidar si tales conceptos solucionan o no el problema que se nos plantea. Sólo cuando al concepto de masa, o a cualquier otra construcción simbólica, se le da un valor final, una validez absoluta, se puede plantear la imposibilidad de comparar, o inconmensurabilidad, de los conceptos de masa de ambas mecánicas. Siendo un medio, siempre es posible determinar cuál permite alcanzar el fin con más facilidad y la precisión requerida.

Luego, no puede haber entidades simbólicas absolutas, finales, con significado propio, cuando todo el simbolismo, completo, es sólo una herramienta, un medio. Pero por esa misma razón, tampoco es necesario que existan tales entidades simbólicas absolutas para que, desde éstas, el significado se propague a las demás entidades simbólicas. El significado viene de fuera del simbolismo, en concreto viene del problema que el simbolismo ayuda a resolver.

La comunicación

Tanto el absolutismo como el escepticismo tienen un concepto erróneo del significado.

Es cierto que, si se pretende, todo puede ser explicado. Pero, en tal caso, las explicaciones son necesariamente circulares. La explicación es un medio, no un fin, es una herramienta para resolver el problema de la supervivencia.

Es cierto que, al final, no se pueden distinguir los hechos empíricos de las teorías hipotéticas, porque ambos son construcciones simbólicas. Pero no hay inconmensurabilidad de teorías, ya que al final está el común problema de la supervivencia.

Si los conceptos y teorías manejados por los distintos individuos fueran inconmensurables, entonces no habría posibilidad de que se comunicaran. Las palabras son convenciones para designar problemas, resoluciones y soluciones, en forma de preguntas, procedimientos o comportamientos, de tal suerte que si no hubiera un punto fijo de apoyo en donde anclar todo el sistema simbólico de convenciones, éste quedaría limitado al individuo.

Así como la existencia no traumática de las paradojas es una prueba en contra del absolutismo, la existencia de comunicación entre individuos es una prueba en contra del escepticismo.

Lenguas muertas

Dado que los lenguajes simbólicos son meras convenciones, descifrar el significado de un escrito en una lengua muerta y olvidada tendría que ser imposible. No lo es porque, aunque no lo parezca, se tienen muchos datos de partida. Por ejemplo, se sabe que fue escrito por personas, y las personas nos enfrentamos, en último término, al mismo problema y con los mismos medios básicos. Dicho de otro modo, los asuntos sobre los que interesa escribir no son muchos y los modos que tenemos de emitir sonidos tampoco. Al parecer, los primeros escritos tenían un propósito fiscal, a saber, recordar quienes habían pagado sus tributos. Y los signos escritos siempre son ideográficos o fonéticos.

No me es posible determinar si tendría sentido que desarrollase un lenguaje simbólico una cultura que, al contrario que las nuestras, no tuviese su raiz en el problema de la supervivencia. Pero, aun suponiendo que tuviera sentido, sin ninguna comunalidad con tal cultura, nos sería imposible hallar una base sobre la que construir los significados. No interpretaríamos su lenguaje como un lenguaje. Aunque las piedras se quisieran comunicar con nosotros, y las regularidades cristalográficas fueran un producto de la sintaxis de su lengua, no podríamos entenderlas.

El lenguaje y la libertad

Un organismo no simbólico puede resolver problemas, incluso de varios modos. Lo que no puede es expresar problemas y resoluciones. Al no poder expresar problemas, no tiene una manera general de crear nuevos problemas o resoluciones. Sí que puede tener mecanismos para crear ciertos tipos concretos de problemas o de resoluciones, pero no de un modo general y sin limitaciones.

Una de las maneras no simbólicas de resolver consiste en probar una serie de comportamientos hasta dar con uno que solucione el problema. Es el procedimiento de tanteo, o de prueba y error, que denominamos adaptación.

Otra manera no simbólica de resolver consiste en modelar lo externo, esto es, interiorizar el comportamiento de lo externo de manera que, por ejemplo, se pueda hacer el tanteo internamente, y así no tener que sufrir los errores cometidos al tantear. A este método lo denominamos aprendizaje.

Incluso se pueden combinar varias maneras de resolver, como por ejemplo la adaptación y el aprendizaje, para aplicar el aprendizaje cuando se tiene un buen modelo del exterior y, en los otros casos, la adaptación.

Es seguro que algunas especies animales son capaces de aumentar los contenidos de sus nombres comunes, esto es, pueden incorporar a su repertorio de alimentos, o de predadores, nuevas especies. Lo que no pueden hacer las especies no simbólicas es crear nuevos nombres comunes, o tipos de cosas completamente nuevas. No pueden crear artefactos ni dibujar. Y no pueden referirse a lo que no es, de modo que no pueden hacer planes ni tener proyectos. No pueden diseñar herramientas.

Sólo un simbolismo permite referirse a lo que no es, y esto es necesario para referirse a la libertad, a la incógnita, de un problema. Por esto es acertado decir que el hombre, que es el único animal con lenguaje simbólico, es el único animal libre. Por esto el lenguaje simbólico y la libertad aparecen simultáneamente en el *homo sapiens*.

Shannon

SHANNON[31] explica, en el segundo párrafo del artículo que funda la teoría matemática de la comunicación, el alcance de la misma. Éstas son sus palabras:

> *El problema fundamental de la comunicación es el de reproducir en un punto, o bien exactamente, o bien aproximadamente, un mensaje seleccionado en otro punto. Frecuentemente los mensajes tienen* significado*; esto es, se refieren a ciertas entidades físicas o conceptuales, o están relacionados en base a cierto sistema con ellas. Estos aspectos semánticos de la comunicación son irrelevantes al problema ingenieril.*

[31] Shannon, C.E. (1948): *A Mathematical Theory of Communication.*

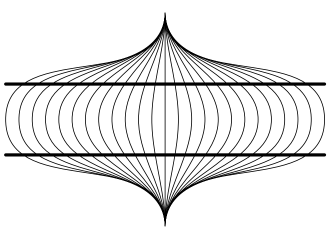
> *Lo que importa es que el mensaje es uno* seleccionado de entre un conjunto *de mensajes posibles. El sistema debe ser diseñado para operar con cualquier posible selección, y no únicamente con aquélla efectivamente elegida, ya que esto es desconocido en el momento del diseño.*

La simplificación propuesta por Shannon, que consiste en evitar los aspectos semánticos, se mostró enormemente fructífera porque permitió el análisis matemático del problema. Y, sin embargo, sólo si el mensaje tiene algún significado interesa su transmisión. Por esto confunde el adverbio que Shannon añade cuando escribe que "frecuentemente los mensajes tienen *significado*", al sugerir que en ocasiones tiene sentido, o comunica algo, enviar un mensaje sin significado.

Incluso desde un punto de vista completamente ingenieril tiene interés el aspecto semántico de la comunicación, porque la información semántica puede utilizarse para resolver las ambigüedades sintácticas del mensaje. Dicho de otro modo, un sistema de comunicación capaz de utilizar la información semántica será más fiable que otro equivalente que no la utilice.

La ironía, que consiste en dar a entender lo contrario de lo que se dice, es un buen ejemplo del valor de la información semántica del mensaje. En este caso, el sistema de comunicación semántico, al recibir un mensaje irónico, deberá ser capaz de deducir su verdadero significado, y esto es lo que habitualmente hacen las personas.

Luego la decisión de Shannon de desdeñar la semántica no se pudo deber a su "irrelevancia". Se debió, por un lado, a que el modelo simplificado permite su análisis matemático y, sobre todo, a que Shannon no disponía de ninguna teoría semántica que pudiera ser formalizada matemáticamente.



Las líneas horizontales son rectas paralelas

¿Resolución o lenguaje?

Varias son las utilidades del simbolismo. El simbolismo permite tanto la resolución de problemas y la elaboración de planes como el lenguaje simbólico con sintaxis. El simbolismo proporciona tanto libre albedrío y voluntad como consciencia de uno mismo y de lo otro.

Se puede explicar que una cualquiera de ellas supone una ventaja evolutiva y que las otras no son más que felices consecuencias. Pero esto sería engañoso, porque no es posible tener una de ellas sin tener las otras.

¿Resolución o lenguaje? Ambos.

¿Libertad o consciencia? Los cuatro.

Que estas características, que son las que tenemos por más humanas, sean diferentes manifestaciones de un mismo fenómeno, a saber, la simbolización, permite explicar la aparición del *homo sapiens* como el resultado de un único salto evolutivo.

$$\text{Simbolismo}\left\{\begin{array}{l}\text{Resolución de problemas}\\ \text{Consciencia de uno mismo y de lo demás}\\ \text{Lenguaje simbólico con sintaxis}\\ \text{Libre albedrío y voluntad}\end{array}\right.$$

Los límites del conocimiento

Hemos rechazado los dos extremos, que todo puede ser conocido y que nada puede ser conocido. Pero, ¿pueden fijarse con más precisión los límites del conocimiento?

El conocimiento, como todo el aparato simbólico, es una herramienta que sirve para la resolución del problema de la supervivencia y todos los demás problemas, que se derivan, en último término, de aquél. Las herramientas sólo deben ser usadas para realizar aquellas tareas para las que son útiles. Y, sobre todo, una vez concluida la tarea para la cual la herramienta ayuda, debe guardarse la herramienta, porque, a partir de entonces, sólo estorba.

Luego el conocimiento es útil hasta que se llega al problema de la supervivencia, pero la causa de la vida queda fuera del alcance del conocimiento. No tiene sentido preguntarse por la causa de la vida o, en todo caso, la explicación de la causa de la vida no puede contener conocimiento. Pueden conocerse, sin embargo, las causas de muchos otros sucesos. Como ya hemos visto, puede conocerse la causa por la cual la calle está mojada. Pero, en cualquier caso, nunca se conocen las causas últimas, sino aquéllas que nos permiten solucionar los problemas que nos encontramos.

El gran plan

Partimos de un hecho primero, que no explicamos, la vida. Si nos interesa el aspecto epistemológico de la vida, entonces la vida debe entenderse como un problema aparente. La vida dispone de mecanismos de reproducción sobre los que opera un proceso de selección merced al cual la vida se diversifica y adapta al medio, como explicó Darwin. Al diversificarse, cada individuo vivo busca, ya por sí mismo ya estableciendo grupos, su propia supervivencia o la de su estirpe, y de este modo se sostiene la vida toda.

Este proceso de evolución darwiniana ha mostrado una notable capacidad para adaptarse a condiciones diversas y cambiantes. Se puede mostrar que, supuesto que la vida es un problema aparente y que se cumplen ciertas condiciones, que evidentemente se han cumplido, los individuos capaces de varios comportamientos, que llamamos adaptadores, tienen una capacidad para sobrevivir y reproducirse mayor que aquellos individuos que sólo ejecutan mecánicamente un único comportamiento. También se puede mostrar, que dadas otras condiciones también verificadas, los aprendices, individuos capaces de representarse el comportamiento de su entorno y, a partir de tal modelo, capaces de predecir internamente el resultado de sus acciones sobre el medio, tienen una ventaja evolutiva sobre los adaptadores y, en consecuencia, pueden sobrevivir a costa, o en lugar, de éstos. Y supuestas otras condiciones, también encontradas, los conocedores, que son capaces de varios modos de resolver, aventajan a los mecanismos, a los adaptadores y a los aprendices, que son capaces de un único modo de resolver.

Por fin, y en otras condiciones igualmente cumplidas, como atestigua la mera existencia de este libro, es ventajoso disponer de un simbolismo. Sólo simbólicamente se pueden representar los problemas, las resoluciones y las soluciones, de modo que este individuo simbólico puede tener una visión del gran plan, que es la vida, que es un problema. Como él mismo es parte de este gran plan, es necesario disponer de una lógica simbólica para ser un sujeto, para tener un yo.

Gaia

Considerar la vida toda como un único organismo, denominado Gaia[32], coincide en aspectos fundamentales con los argumentos aquí presentados.

---

[32] Lovelock, J.E. (1979): *Gaia. A new look at life on Earth.*

Saber es un medio, el fin es vivir

Saber es solamente un medio, el fin es vivir.

Yo quiero vivir, pero moriré

Yo quiero vivir, pero moriré. La frase anterior resume nuestra situación. Enuncia el problema de la supervivencia y declara que no tiene solución.

Pero hay otros puntos de vista.

Negar la muerte

Yo quiero vivir, y no moriré. Ésta es la esperanza a la que muchos se aferran. Las variantes son muchas. Lo más arduo de esta posición es pasar por alto la observación de que todos los seres vivos terminan por morir.

El credo dualista divide a la persona en cuerpo y alma. El cuerpo muere, pero no el alma. El alma queda fuera del alcance de los sentidos, lo que explica que solamente se pueda verificar la muerte del cuerpo. Sobre lo que ocurre al alma una vez que el cuerpo muere, hay dos posibilidades: que el alma pase a otro cuerpo, o que no pase.

La creencia dualista puede tener su fundamento en la diferencia que existe entre la realidad y el yo. El yo es la solución del problema del sujeto, está en donde está la libertad del problema. La realidad, por otro lado, es la condición del problema del sujeto. El cuerpo del sujeto no es su yo, sino un condicionante que el sujeto debe tener en cuenta para procurarse su supervivencia. Así que el cuerpo es parte de la realidad, pero no el yo. Luego el yo cumple varios de los requisitos exigidos al alma.

Negar el deseo

Yo no quiero vivir, y moriré. Es la postura del pesimista, más vale no desear nada y de este modo no es posible la decepción. La dificultad de esta posición es que niega la propia vida, por lo que parece difícil que quien no desea vivir pueda evitar el suicidio.

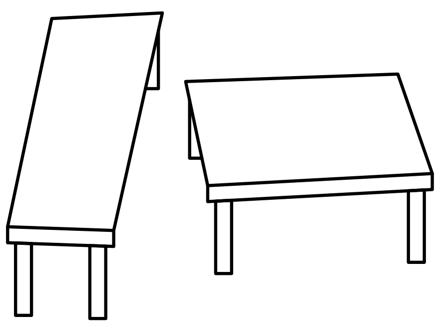
Negar la libertad

No hay libertad, de manera que aunque parece que yo quiero vivir, esto es una ilusión. No puedo querer, no puede haber deseo, ya que no hay elección que hacer. El fatalismo dice que todo está escrito. Nos parece que tenemos libertad para hacer, pero no es así. Sus dos variantes más extendidas son el fatalismo religioso y el materialismo.

Para el fatalismo religioso Dios es todopoderoso. Si hubiera un ser libre distinto de Dios, entonces este ser libre podría actuar en contra de la voluntad divina, pero esto significaría que Dios no es todopoderoso. Luego, el único ser libre es Dios todopoderoso. A este respecto, la teología musulmana es coherente y la cristiana no.

El materialismo supone la existencia de sustancias elementales cuyas relaciones están regidas por leyes naturales. Todo cuanto existe resulta de la combinación de estos elementos, que obedece a las leyes de la naturaleza. De modo que para los materialistas son las leyes naturales las que determinan todo cuanto sucede, sin dejar espacio alguno a la libertad, que simplemente es una ilusión.

La otra gran dificultad del fatalismo, siendo la primera la de tener que negar la evidencia de la libertad, es su ética. El fatalismo reduce a la persona a una marioneta o a un mecanismo. En ninguno de los dos casos tiene la persona la posibilidad de actuar de otro modo, de manera que tampoco es posible prescribir qué debe hacer. No hay posibilidad de ser virtuoso, ni de ser perverso, simplemente no hay posibilidad.



Los paralelogramos son iguales

Minsky

MINSKY[33] piensa que "las mentes son simplemente lo que los cerebros hacen", con lo que resuelve a la manera materialista el problema del dualismo cartesiano entre el cuerpo y la mente. El lector que así lo prefiera puede leer alma donde está escrito mente.

Al no conocer todas las causas adoptamos otras maneras de hablar. Así, sobre todo al referirnos a personas, usamos conceptos como voluntad, libertad o propósito que, opina MINSKY, sólo son maneras de hablar útiles porque ignoramos las causas. Y concluye:

> *No importa que el mundo físico no deje espacio alguno a la libre voluntad: ese concepto es esencial en nuestros modelos de lo mental. En él está basada demasiada de nuestra psicología como para prescindir alguna vez de él. Estamos virtualmente forzados a mantener esa creencia, aun cuando sabemos que es falsa [...].*

El materialismo, que con MONOD[34] ha retomado la antigua máxima de DEMÓCRITO "todo es azar y necesidad", confunde la explicación con el fenómeno. El azar y la necesidad son conceptos simbólicos muy útiles, pero sólo eso, útiles. Y la libertad es también un concepto útil.

En la resolución del problema aparente hay una parte que consiste en modelar lo externo, y en esta modelación lo que interesa es encontrar un mecanismo, esto es, un modelo sin ningún grado de libertad, que se comporte exactamente como el exterior. De este modo se puede utilizar el modelo para prever con exactitud lo que pasaría en cada caso. Así es como procuramos modelar el mundo físico, y por esto el conocimiento científico, a nivel social, y la realidad, a nivel personal, excluyen la libertad.

Pero esta modelación sólo sirve para traer lo externo al interior, para fijar el cambio, para convertir el fenómeno en símbolo. No puede olvidarse que, por importante que sea, la modelación no es un fin en sí misma, sino que tiene el propósito de ayudar en la resolución del problema aparente. Y en el problema aparente, como en todo problema, hay libertad porque sin libertad no hay problema. En el caso del problema aparente de la supervivencia tenemos libertad para actuar y la condición de sobrevivir.

---

[33] Minsky, M. (1985): *The Society of Mind.*

[34] Monod, J. (1970): *El azar y la necesidad.*

Yo soy libre

Un simbolismo es un sistema extensible de convenciones que sirve para resolver problemas, ya que permite la expresión de problemas, resoluciones y soluciones. Para resolver simbólicamente es preciso, primero, fijar sintácticamente el problema para que, una vez fijo, pueda procesarse algorítmicamente y de este modo obtener, finalmente, una solución simbólica que tenga significado, esto es, que se refiera a un comportamiento que solucione efectivamente el problema.

El significado de los símbolos no es interno al simbolismo, que por sí mismo está vacío de significados, sino que viene dado por el papel que interpretan estos símbolos en la resolución del problema. Así, la incógnita ha de ser un símbolo libre de significado, un puro artefacto sintáctico, mientras que la solución ha de tener significado.

Siendo la vida un problema en continua resolución, solamente un individuo que disponga de una lógica simbólica puede representarse la vida como problema y a sí mismo como resolutor, o sea, solamente él puede ser un sujeto. Como este sujeto es un resolutor, su propósito es solucionar el problema vital, y se ve a sí mismo como la solución. En definitiva, el yo es la solución del problema del sujeto, y si la solución del problema del sujeto fuera Ω, entonces podríamos usar Ω para referirnos al yo del sujeto. Pero como el problema del sujeto no alcanza nunca una solución, ésta no puede ser expresada directamente. El problema sí. Luego la única manera de referirse al yo, consiste en referirse indirectamente a él como la solución del problema del sujeto. La solución de un problema no solucionado es la incógnita, la libertad del problema, de donde se concluye que el yo es libertad, aunque eso sí, condicionada.

Además, ¿hay algo más real que mi sensación de ser libre?

Pilares para una ética subjetivista

La epistemología

La epistemología estudia los fundamentos del saber. No explica ningún saber específico, sino el propio saber, de modo que es un saber sobre el saber. Determina, en primer lugar, si el saber es posible. Así, las escuelas escépticas, que predican la imposibilidad del saber, no necesitan decir nada más, y aun ni esto si son completamente coherentes. Para los no escépticos queda la tarea de mostrar cuál es la esencia del saber y, en función de ésta, cómo puede adquirirse y con qué grado de confianza.

El sujeto y el objeto

La epistemología distingue sujeto y objeto. El objeto es lo sabido y el sujeto es quien lo sabe. Cuál sea la naturaleza de sujeto y objeto y cómo sean las relaciones entre ellos, define las diferentes epistemologías. No pasa inadvertida la similitud de la estructura 'sujeto verbo objeto', de frases como 'papá come pan', con esta estructura de explicación final, que tiene la forma 'sujeto sabe objeto'. El orden de los elementos, que depende de la sintaxis del idioma, no es importante.

El subjetivismo y el objetivismo

Siempre podemos dividir un tema en dos, basta elegir cualquier propiedad y tratar la parte que cumple la propiedad por un lado y, separadamente, la parte que no la cumple. En el caso que nos ocupa, y desde Descartes, que explicó que el yo es la única fuente de certeza, se hace imposible prescindir del sujeto. La duda se cierne sobre el objeto, de manera que clasificaremos las diferentes epistemologías en dos grupos: las subjetivistas que postulan que el objeto está condicionado al sujeto, y las objetivistas que sostienen lo contrario.

La diferencia

La posición objetiva postula que la piedra que vemos existe por sí misma, independientemente de todo. La posición subjetiva condiciona la existencia de la piedra al sujeto que la percibe. La diferencia entre ambas posiciones es, en la práctica y para el sujeto, nula, porque la condición se cumple siempre. Dicho de otro modo, los sujetos sólo podemos estudiar las diferencias teóricas entre el subjetivismo y el objetivismo. La posición subjetivista es más segura, ya que como sujeto que soy únicamente puedo verificar que existe la piedra si yo soy. Dejar de ser, crudamente morir, para comprobar si la piedra sigue existiendo, o no, es un experimento no recomendable.

Un matiz

No se diferencia el objetivismo del subjetivismo porque piense que la piedra que he visto sigue estando donde estaba cuando cierro los ojos. Esto lo puedo creer tanto siendo objetivista como subjetivista. Como objetivista pensaría, además, que la piedra seguiría siendo piedra aun cuando no fuera para mi algo manejable y duro, tan *dura* como para matar o herir si se emplea la fuerza suficiente. Como subjetivista pienso, sin embargo, que si mi tamaño fuera mil veces mayor, la piedra no sería tal sino que se confundiría con otras y todas juntas serían para mi arena *blanda* donde poder acostarme a reposar.

La lógica universal

El objetivista puede alegar que la arena no es más que un montón de piedrecitas, y que si no existieran esas piedrecitas, aunque sean indistinguibles, desaparecería la arena del subjetivista. La existencia de objetos invisibles supone la existencia de objetos que nuestros sentidos no pueden verificar, aunque pueden ser inferidos. Los objetos invisibles del objetivista son semejantes a los objetos del subjetivista, puesto que necesitan un sujeto que haga las inferencias. Sólo se puede prescindir del sujeto si se postula que la lógica en la que se hacen las inferencias es una lógica universal, esto es, si la lógica tuviera una existencia propia, independiente de cualquier sujeto. Resumiendo, la posición objetivista ha de optar entre aceptar que sólo existen los objetos sensibles o afirmar que existe una lógica universal.

La epistemología y la ética

Así las cosas, creo que no descubro nada nuevo si digo que lo que se teme del subjetivismo no es su epistemología, sino su ética. Nada nuevo, en efecto, ya que toda la acción del viejo SÓCRATES[35] tuvo como meta desterrar de Atenas la ética subjetivista personificada en el sofista PROTÁGORAS. Y es que SÓCRATES entendía que es peligroso dejar que cada individuo defina lo que es bueno y lo que es malo.

El yoísmo

SÓCRATES estaba en lo cierto, porque el subjetivismo es estéril cuando sólo consigue dar cuenta del sujeto. A este tipo de subjetivismo lo llamaremos yoísmo. Si lo que yo sé solamente me vale a mi, como sostenían algunos sofistas, entonces tampoco tiene interés comunicarlo, el diálogo es inútil y el saber queda encerrado en el yo. El yoísmo, al predicar la imposibilidad de la comunicación, es escéptico.

Un subjetivismo no egoísta

Para que el subjetivismo sea capaz de una ética no egoísta, ha de construir desde el yo una teoría mayor que yo, aunque no me trascienda. Esto es posible. Veamos que nuestra teoría cumple estos requisitos.

Una ética subjetiva

La vida puede tomar consciencia de sí, esto es, puede saberse problema. Esto ocurre cuando la evolución, al encadenarse una determinada secuencia de circunstancias, se topa con el sujeto, que es simbólico porque sólo en símbolos pueden expresarse los problemas. Este sujeto construye la realidad para sobrevivir y sus objetos son simbólicos porque, como acabamos de ver, así es su lógica, o sus categorías si preferimos el modo de KANT[36] a la manera de WITTGENSTEIN[37]. En suma, el saber es subjetivo y no absoluto. La forma que yo le doy a la realidad está al servicio de mi ansia compulsiva por sobrevivir. El saber es sólo un medio, el fin es vivir.

Ya tenemos dos de los cuatro pilares de la ética subjetivista: la vida es lo que importa y el sujeto es sólo una parte de la vida. El segundo pilar es trivial, y tampoco el primero es muy original; coincide, por ejemplo, con la razón vital de ORTEGA[38].

---

[35] Platón (IV a.C.): *Diálogos.*

[36] Kant, I. (1781, 1787): *Crítica de la razón pura.*

[37] Wittgenstein, L. (1922): *Tractatus Logico-Philosophicus.*

[38] Ortega y G., J. (1914): *Meditaciones del Quijote.*

El tercero, yo soy libre, también nos lo proporciona la epistemología subjetiva al declarar que la vida es un problema aparente y que el yo es la solución del problema vital, que por ser un problema aparente no tiene solución. Un problema es libertad condicionada y su solución es un uso de la libertad que satisface la condición. Sin libertad no hay problema, ni hay libertad sin problema. Luego es por no alcanzar la plenitud de una solución por lo que el sujeto es libre y, consecuentemente, por lo que tiene sentido la ética.

Qué he de hacer con mi libertad si lo que importa es la vida y yo soy sólo un no querer morir. Siendo éste el planteamiento ético subjetivista, cabe suponer que la ética resultante sea solidaria. Pero para que sea posible la solidaridad, la epistemología subjetivista aún debe cumplir otro requisito, o cuarto pilar, a saber, que sea posible la comunicación. La comunicación es el traspaso de significados, por lo que precisamos de una semántica subjetivista.

Aquí sostenemos que son los problemas los que proporcionan el significado, de modo que sólo pueden comunicarse los individuos que comparten un mismo problema. Siendo la vida el problema original, aquel problema del cual se derivan todos los demás problemas, todos los seres vivos compartimos, al menos, el problema vital. Y, en consecuencia, la comunicación es posible entre todos los seres vivos. Es cierto que a mayor comunidad de problemas, más rica será la comunicación. El máximo lo alcanza, precisamente, la comunicación entre sujetos simbólicos. Los sujetos simbólicos disponemos de un lenguaje, que es un sistema simbólico de comunicación, que, por ser simbólico, nos permite expresar problemas, soluciones y resoluciones.

La comunicación y el lenguaje hacen posible la solidaridad, pero además son una prueba de que el sujeto es sólo una parte de la vida y, en consecuencia, son una prueba de que el yoísmo es insuficiente.

La comunicación y el lenguaje hacen al sujeto parte de una comunidad, que es comunidad, precisamente, porque hay un problema común. De aquí a proponer que todos los sujetos ayuden a solucionar el problema, no hay ni un paso.

Si escribo esto es porque quiero comunicarlo. Puedo comunicarme porque hay un problema común. Habiendo un problema común debo ayudar a solucionarlo. Así que no tengo más que dos opciones, o extrañarme o ayudar.

Dos cuestiones retóricas

¿Aceptaría Sócrates, en estas condiciones, el subjetivismo? Y, en tal caso, ¿se dejaría ajusticiar?

Por fin

El simbolismo es el concepto central de esta introducción. Aparece como una herramienta que permite representar problemas, resoluciones y soluciones, pero disponer de una lógica simbólica supone disponer, igualmente, de otras capacidades, que tenemos por distintas, pero que sólo son diferentes aspectos de la simbolización. Son, en concreto, aquellas capacidades que tenemos por más humanas. Veámoslas.

El simbolismo nos permite pensar en lo que no es, por ejemplo, en un proyecto. El simbolismo permite pensar sobre problemas y resoluciones, lo que nos hace capaces de diseñar herramientas, que son medios de resolución. El simbolismo permite la completa representación del mundo, que incluye al propio individuo simbólico, así que solamente los individuos simbólicos podemos ser sujetos con consciencia de nosotros mismos y de lo demás. Con el simbolismo aparece la poderosa comunicación sintáctica, es decir, el lenguaje. Y sólo en el simbolismo cabe la libertad.

La ética prevaleció sobre la epistemología desde Sócrates hasta que Descartes invirtió el orden de prevalencia. Es notorio que Kant no pudo congeniar la epistemología y la ética. Pero al reconocer que la libertad es el ingrediente primordial que ha construido nuestro pensamiento a la manera simbólica, queda por fin abierta la posibilidad de una conjunción armónica de ética y epistemología.

La respuesta aparente

Se formulan preguntas contestadas más adelante. Las respuestas que aquí se dan están resumidas, es decir, son sólo primeras aproximaciones, por lo que se recomienda encarecidamente la interpretación directa de la segunda parte del libro para alcanzar un mayor entendimiento. Para ayudar al lector, se señalan las secciones en donde puede proseguir la investigación sobre cada cuestión.

¿Sabe sumar una calculadora? La calculadora hace sumas, pero no sabe lo que significa sumar, ya que la calculadora no se enfrenta a problema alguno, y son los problemas los que proporcionan el significado. Véase la §5.10.

¿Cómo es posible la comunicación? La comunicación, o sea, el traspaso de significados, sólo es posible entre individuos que se enfrentan al mismo problema. Así, por ejemplo, no hay comunicación entre el autor y el libro que escribe, sino entre el autor y el lector. Véanse la §5.10 y la §8.5.6.

¿Qué significa significa? El problema es la fuente del significado. Los resolutores generales de problemas son simbólicos, es decir, se componen de dos capas: semántica y sintaxis. Los objetos sintácticos son más versátiles, pudiendo representar problemas y resoluciones, pero sólo tienen significado primario aquéllos que se corresponden directamente con algún objeto semántico, con alguna solución. El resto de los objetos sintácticos sólo tienen un significado derivado, o ninguno. Los objetos sintácticos sin posible correspondencia semántica se denominan paradojas. Los simbolismos se estudian en la §5, donde se muestra que los resolutores generales son necesariamente simbólicos, pero el significado aparece también en la §1 y en la §8.

Esta frase es falsa, ¿lo es? Si fuera cierta, entonces, según lo que la propia frase enuncia, sería falsa, pero si fuera falsa, entonces no podría ser lo que la propia frase dice, o sea, sería cierta. Como no hay modo de deshacer el enredo, decimos que ni es falsa ni es cierta, es paradójica. Se trata de una expresión simbólica o sintáctica correcta, pero que no tiene significado alguno porque no se corresponde con ningún objeto semántico. Las paradojas, cuando deben ser resueltas, esto es, cuando se busca su correspondencia semántica, resultan en bucles sin final. Véase la §5.7.1.

¿Son peligrosas las paradojas? No, ya que la condición de parada que evita las resoluciones demasiado largas, también evitará las resoluciones paradójicas, que no son más que resoluciones sin final. Véase la §5.7.3.

¿Qué es un problema? Un problema es libertad condicionada. De otro modo, todo problema tiene dos componentes: libertad y condición. La solución del problema es un determinado uso de la libertad que satisface la condición. Véase la §4.2.

¿Hay diferencia entre solución y resolución? Sí. La resolución es el proceso de búsqueda de la solución que reduce el problema, es decir, es el proceso que discurre desde el punto en el que se tiene el problema, con su condición y su libertad no ejercitada, hasta el momento en el que se tiene la solución, o sea, hasta el momento en el que se ejerce la libertad y se satisface la condición. En resumen, que resolver es a buscar como solucionar es a encontrar. Véase la §4.2.

¿Qué maneras hay de resolver un problema? Hay tres maneras básicas: conocer la solución del problema y aplicar tal solución; tantear entre un conjunto de posibles soluciones, es decir, aplicar un procedimiento de prueba y error hasta dar con una solución, y entonces aplicarla; y sustituir el problema dado por otro análogo, o sea, trasladar el problema, resolver éste, reconvertir la solución y aplicarla. Estas tres maneras básicas pueden ser combinadas en árboles de resolución más complejos. Véanse la §4.3 y la §4.6.

¿Qué es la libertad? Es uno de los dos componentes de todo problema. Sin libertad no hay problema. No hay libertad sin problema. Véase la §4.2.

¿Soy yo una persona? La pregunta es capciosa. El mundo, que aquí entendemos como la representación simbólica del problema de la supervivencia, tiene, como cualquier problema, dos componentes: la libertad, que soy yo, y la condición, que es el resto del mundo, es el universo real. De modo que las personas tienen un yo, que es la representación simbólica de la propia persona en el mundo. Véanse la §7.4.3 y la §8.3.

¿Puedo yo ser libre? El yo ocupa el lugar de la incógnita en el problema de la supervivencia del sujeto. Por lo tanto, antes de ser resuelto el problema, es libertad y el sujeto percibe su yo como el asiento del libre albedrío. Pero el sujeto debe ir resolviendo el problema de la supervivencia, y esto supone ir eliminando la libertad de la incógnita. Luego el yo es libertad eliminada a voluntad o, dicho de otro modo, es libertad condicionada por la biografía y por la necesidad de vivir. Véase la §7.5.

¿Qué soy yo? Yo soy libertad para no morir. La transposición positiva, yo soy libertad para vivir, no es completamente equivalente, porque esconde la tensión que encierra el yo. Esta tensión sólo se muestra cuando me percato de la finitud de la vida, finitud que la muerte evoca inmediatamente. Para más detalles sobre el yo, consúltese la §7.4.3.

¿Por qué morimos? La muerte no puede ser explicada, sino que, por el contrario, todas las explicaciones se buscan en un intento de no morir. Así que la muerte es la fuente del significado; también la vida. Estamos aceptando que el problema de la supervivencia es *el problema*, y que todos los demás problemas derivan de él. La §8, y en verdad todo el libro, intentan hallar una respuesta a este interrogante.

¿Es mi cuerpo parte de mi yo? No, el cuerpo es la parte física de mi persona capaz de ejecutar los comportamientos que solucionan los problemas que me encuentro, problemas todos ellos derivados en último término del problema de la supervivencia. Mi yo es, por el contrario, la entidad sintáctica, esto es, simbólica, que representa a mi persona en la traducción a símbolos de mi problema de la supervivencia. La distinción entre el cuerpo y su gobierno es lo que define la adaptación, que es la primera etapa de la evolución resolutiva, véase la §2.

¿Para qué sirve la consciencia? Para unificar el complejo cognitivo de los sujetos. La consciencia es el órgano de resolución máximo, y se encarga de resolver un único problema en cada momento. La solución del problema que llega a la consciencia es el yo del sujeto. Véase la §7.4.2.

¿Se pueden pensar varias cosas a la vez? Sí. Aunque el pensamiento consciente es secuencial, el cerebro de las personas es capaz de solucionar varios problemas simultáneamente. La consciencia, que es única, atiende a un único problema en cada momento, y de ese modo consigue dar unidad a la persona. Véase la §7.5.

¿Piensa un perro? Depende de hasta dónde se lleve la definición de 'pensar'. Si todo tratamiento de información se considera pensar, entonces hasta animales mucho menos complejos que el perro piensan. Por otra parte, es muy posible que sólo las personas sean capaces de un pensamiento simbólico reflexivo, mientras que otras varias especies de animales, entre las que se encuentra el perro, sean capaces de varias maneras de resolución, y por lo tanto se puedan catalogar como conocedores no simbólicos. Otras especies menos complejas serán capaces de elaborar representaciones internas, siendo aprendices. Véase, sobre todo, la §6.

¿Qué es la felicidad? Es una de las maneras de la emoción. La emoción es uno de los datos que el conocedor utiliza para determinar la estrategia que debe emplear para resolver cada problema; en concreto, es el dato proviniente del propio mecanismo de resolución de problemas. La felicidad es el estado de complacencia en el que se da por solucionado un problema. Véase la §6.2.1.

¿Puede ser feliz un perro? Sí. Suponiendo que un perro, desde el punto de vista cognitivo, es un conocedor no simbólico, entonces es necesario que tenga emociones que guíen su estrategia de resolución de problemas. Siendo la felicidad la emoción asociada al reconocimiento de que un problema está solucionado, es muy probable que todo conocedor la necesite. Véase la §6.2.1.

¿Se puede fabricar una persona? Seguramente, aunque de momento hay cuestiones técnicamente arduas. Lo fundamental para que un artefacto sea tenido, en sus aspectos cognitivos, por una persona, es que se enfrente al mismo problema y utilizando la misma lógica y el mismo aparato de resolución que las personas de carne y hueso. Esto plantea otro interrogante, ¿qué interés tendría fabricar una máquina cuya razón de ser fuera perpetuar su aparato biológico y su especie? Los peligros para la especie humana sí son evidentes. Por el contrario, un robot ayudante tendría como razón de ser un problema muy distinto al de la persona ayudada. Véase la §8.

¿Es inteligente un ordenador? Sólo puede mostrar inteligencia un resolutor general de problemas tratando de resolver cierto problema en cierta lógica. Luego una computadora puede mostrarse inteligente, por ejemplo, jugando una partida de ajedrez. Dado que su problema es tan diferente del problema de la supervivencia, su inteligencia es muy diferente de la de una persona, e incluso puede no ser tenida por tal. Véase la §8.5.8.

¿Para qué sirve la lógica? La lógica permite representar internamente el exterior. Merced a la lógica los aprendices pueden representar soluciones, o sea, comportamientos. Si la lógica es simbólica, entonces también pueden representarse problemas y resoluciones. Véanse la §3 y la §5.

¿Qué es un comportamiento? Es un patrón que determina, para cada posible estímulo externo y cada posible contenido de la memoria interna, cuál será la acción ejecutada sobre el exterior y cuál será el nuevo contenido de la memoria interna. Por ejemplo, programar una computadora consiste en definir su comportamiento. La definición técnica de comportamiento se encuentra en el Anexo A (§A.5.5).

¿Hay diferencia entre adaptación y aprendizaje? Sí, un adaptador es capaz de varios comportamientos que va probando hasta encontrar uno adecuado, mientras que el aprendiz emplea una manera más elaborada de adaptación que se sirve de una lógica interna en la que elabora modelos de lo externo para poder anticipar el resultado de las pruebas sin tener que realizarlas sobre el exterior y, por ello, sin tener que sufrir sus consecuencias. Véanse la §2.8 y la §3.7 o, en general, la §2 y la §3.

¿Para qué sirve la sintaxis? La sintaxis es la novedad que introducen las lógicas simbólicas. Merced a la sintaxis, las lógicas simbólicas pueden representar, además de las soluciones que toda lógica es capaz de representar, los problemas y las resoluciones. De este modo un conocedor simbólico es capaz de resolver un problema de cualquiera de las maneras. Véase la §5, sobre todo la §5.9.

¿Qué razón evolutiva tiene el simbolismo? Cognitivamente, cada especie es capaz de unas determinadas maneras de resolver problemas. Un conocedor simbólico puede anticipar el resultado de los diversos modos de resolver, esto es, interioriza la propia evolución. Es la evolución cognitiva que, al parecer, sólo puede desarrollar el *homo sapiens*. Véanse la §4.7 y la §6.5.1.

¿Qué es la abstracción? Es utilizar un problema con varias soluciones para referirse, en perífrasis, al conjunto de dichas soluciones. De otra manera, es referirse a un conjunto de soluciones por sus propiedades. Véase la §5.6.

¿Qué es un vaso? En genérico, el vaso es el útil que soluciona nuestro problema de beber, por lo que es un ente abstracto. Por otra parte, un vaso concreto es un objeto, es decir, una parte del universo que nuestra atención determina que debe ser tratada como una unidad, en este caso como una de las soluciones al problema de beber, porque ello simplifica su tratamiento. Es por esto por lo que los objetos sólo pueden ser definidos teniendo en cuenta nuestras necesidades y apetencias. De nuevo se muestra que el significado lo proporciona el problema. Véanse la §5.6 y la §7.3.4.

¿Por qué sufrimos ilusiones? Porque lo que alcanza el aparato simbólico de las personas no es la apariencia bruta, sino una apariencia, ya procesada, de objetos. En nuestra jerga, porque el resolutor general simbólico está construido sobre un resolutor especializado. El sistema visual hace un enorme procesamiento no simbólico de la apariencia bruta, de manera que, por ejemplo, una zona de cierto color, que cambia de posición en la retina sin variar de forma, puede ser entregada al aparato simbólico como un objeto. La ilusión se produce cuando el proceso simbólico consciente descubre alguna anomalía en los resultados del procesamiento previo. La §7.3 explica el preprocesamiento no simbólico de la apariencia.

¿Cuál es el último reducto del absolutismo? El pensamiento. Que me convenga denominar vaso a un 'vaso' no implica que a otra inteligencia, esto es, a otro resolutor tratando de resolver otro problema en otra lógica, también le interese usar el concepto abstracto vaso. Luego la existencia del 'vaso' está subordinada al problema, a su resolutor y a la lógica de éste. Esto se aplica, igualmente, a cualquier otro concepto, ya sea de los considerados físicos, ya sea abstracto. Véanse la §8.5.4 y la §8.5.8.

¿Hay diferencia entre saber y conocimiento? Sí. El conocimiento es la descripción simbólica, o sea, inmutable, de la cambiante apariencia. El saber es la explicación que yo juzgo buena. El conocimiento es objetivo, ya que es independiente de la voluntad, pero no es concluyente, ya que no me alcanza, es descriptivo. El saber me alcanza, y por esta razón es libre, subjetivo y concluyente, es decir, explicativo. Ninguno es completo porque es imposible conocer la apariencia aún no experimentada y porque la muerte nunca podrá ser sabida. Véase la §8.5.

¿Explica la ciencia? No. Al limitarse a lo objetivo, a lo que queda fuera de la voluntad, la ciencia sólo describe. El conocimiento científico no alcanza el yo, y por esto no explica, sólo describe. Véanse la §8.4.1 y la §8.5.2.

¿Qué conceptos son transcendentes? Ninguno. Nuestro pensamiento simbólico es, como nuestro cuerpo físico, un producto de la evolución darwiniana. Incluso el yo de DESCARTES es un producto del proceso evolutivo y, por ello, una herramienta diseñada por la evolución con el propósito de conservar la vida. Más allá de esa utilidad inmediata, pierde por completo su significado. De manera que la razón es contingente y no absoluta ni transcendente. Éste es un tema recurrente que se trata, especialmente, en la §8. Es instructiva la lectura del libro de LAKATOS[39], que desbarata el ideal platónico, precisamente, en su ejemplo más querido, las matemáticas.

¿Qué niega el materialismo? La libertad. El materialismo postula que todo está regido por las leyes de la naturaleza, y no deja lugar al libre albedrío. Sin libertad no hay problema. Para el materialismo ni siquiera la muerte es un problema, ya que también al morir se conserva la energía. En fin, el materialismo es una de las maneras de negar que [la mejor manera de entender] la vida es [considerarla] un problema aparente, y por lo tanto se opone a las tesis aquí defendidas. Véase la §8.5.7.

¿Qué es la vida? La vida no puede ser explicada, sino que es el motivo que hace necesarias las explicaciones, al menos cuando la vida alcanza evolutivamente la complejidad del conocedor simbólico. Desde el punto de vista cognoscitivo, la vida tiene como modelo el problema aparente. Véase toda la §8, aunque sólo leyendo el libro por completo se consigue una visión global.

¿Cuál es el problema aparente? El problema aparente es aquél en el que sólo está definida la interacción, es decir, en el que el único dato es la apariencia. Es como el problema de aprovechar una caja negra, de la que no se tiene manual de uso y cuyo interior es inaccesible. Podemos ejercer acciones sobre ella, anotar sus reacciones, conjeturar sobre su funcionamiento y, así, elaborar algún modo de actuar que resulte provechoso. “El problema aparente” postula que ésa es nuestra situación en el mundo, y extrae las consecuencias. Véanse la §1.1 y la §4.5.

[39] Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.*

Sinopsis

Propósito

En la segunda parte del libro se expondrá sistemáticamente la teoría presentada en esta introducción. El propósito de esta sinopsis es mostrar algunas de las motivaciones que se esconden detrás de lo expuesto concisa y tersamente en la segunda parte, y trazar su línea argumental.

La evolución

Partiendo de la teoría de la evolución de DARWIN, es preciso concluir que también las personas y sus obras han de ser explicadas, finalmente, como consecuencia del proceso del que son productos, a saber, el proceso de selección natural. Esto, que puede parecer obvio, tiene consecuencias que no son tan fáciles de asimilar. Por ejemplo, así como entendemos que tener cinco dedos en cada mano es un resultado, no necesario, del azaroso proceso evolutivo, así también deben ser entendidos los conceptos filosóficos, científicos, éticos, religiosos o prácticos. En definitiva, ningún concepto puede ir más allá de la vida, porque también los conceptos, las ideas y las verdades son herramientas diseñadas por la evolución para sobrevivir más y mejor.

La contingencia

La conclusión anterior establece dos requisitos que son aplicables a cualquier teoría del conocimiento, o epistemología. Uno es que las conclusiones de tal teoría cognitiva deben corroborar el carácter contingente del pensamiento humano. El otro es que las explicaciones deben ser evolutivas, esto es, deben contentarse con mostrar la viabilidad de los hechos si se dan las condiciones adecuadas, quedando en cambio relegadas las deducciones, más soberbias, que demuestran la necesidad de las conclusiones.

La libertad

Pero tampoco el materialismo, que todo lo explica en base al azar y a la necesidad de las leyes de la naturaleza, negando cualquier posibilidad a la libertad y el libre albedrío, parece una explicación suficiente. Y aun así, la única explicación aceptable es la científica. Porque la explicación debe ser una teoría que utilice conceptos precisos para que sus consecuencias puedan ser verificadas. De manera que el paradigma que buscamos no puede ser el autómata finito del materialismo. Un autómata finito y determinístico es un mecanismo en el que el conocimiento completo de su estado inicial y de las acciones que le afectan permite determinar completamente su comportamiento, esto es, sus reacciones y sus estados subsiguientes. Tampoco vale la extensión probabilística, en que la indeterminación viene dada exclusivamente por el azar.

El problema aparente

La elección del problema aparente como paradigma teórico tiene varias consecuencias inmediatas. Por un lado introduce desde el principio dos conceptos fundamentales: la libertad, porque sin posibilidades entre las que elegir no hay problema, y el significado, porque si todas las posibilidades son igualmente buenas entonces tampoco hay problema. Por otro lado, exige la elaboración de una teoría del problema que ocupe el lugar de la teoría del autómata finito. Por último, retoma la postura filosófica que nace con los empiristas británicos y que corrige Kant. Los empiristas habían eliminado cualquier tentación de sustancia dejando, como único dato, la apariencia. Kant, ante el escepticismo de Hume, había postulado la existencia de una lógica interna, sus categorías, en las que se reflejaba o reconstruía lo que hubiera tras las apariencias. El problema aparente añade, a sugerencia de Darwin y como origen de todo significado, la supervivencia.

La lógica

Para poder atacar el problema aparente de un modo científico, y no sólo filosófico, hemos de plantearlo matemáticamente. Por esto introducimos una lógica, definida a la manera de Wittgenstein como el marco que delimita lo que es posible. La elección del álgebra de los autómatas finitos como la lógica en la que se plantea y se resuelve el problema aparente, parece acercarnos a los materialistas, aunque ya veremos luego que no es así. Dos son las razones que aconsejan elegir el álgebra automática: la primera es que nos permite definir y tratar matemáticamente los comportamientos, de modo que podemos referirnos indistintamente a comportamientos o a autómatas, y la segunda es que Turing nos mostró que en el autómata finito está implícita toda la potencia de cálculo simbólico de las computadoras digitales, así que cualquier cálculo que pueda hacer una computadora, también puede hacerlo un autómata finito. Una consecuencia de elegir como lógica el álgebra automática, es que las soluciones, y por lo tanto los objetos semánticos de la teoría resultante, serán comportamientos, y no acciones.

La formalización

Para el problema aparente hay dos clases de reacciones, las buenas, que son las deseadas, y las malas, que son el resto, y su solución es aquélla que sólo recibe reacciones buenas. Cada posible solución ejecuta acciones para intentar que las reacciones sean buenas, y no malas. Pero sólo conoce la apariencia, esto es, las acciones y las reacciones, y nada sabe de lo que media desde las acciones hasta las reacciones, y aun desconoce si media algo o no.

En castellano, el planteamiento del problema aparente en el álgebra automática, puede ser leído así: hallar aquel comportamiento, definido como un autómata finito $\mathcal{A}$, que enfrentado a *cualquier* otro comportamiento, al que denominamos entorno o universo $\mathcal{U}$, obtenga de este universo las reacciones que desee. Cuando lo consigue, y considerando al problema aparente como el modelo de la vida, decimos que sobrevive.

Para expresar que sólo la apariencia es conocida, escribimos que el universo $\mathcal{U}$ podía ser cualquiera, y como consecuencia el problema así planteado no tiene una solución definitiva. No la tiene porque, al quedar el universo completamente indefinido, es posible encontrar universos que harían imposible la solución. Una vez demostrado que el problema aparente no tiene una solución definitiva, no queda otra alternativa que buscar soluciones relativamente mejores, para lo cual es preciso definir una solución de referencia. Llamamos mecanismo $\mathcal{A}_0$ a la solución de referencia. En este punto finaliza la sección primera, §1, de la segunda parte del libro.

$$
\text{El problema aparente}\left\{\begin{array}{ll}
\text{El problema:} & \text{el mecanismo}\\
\text{El adaptador:} & \text{el gobernador y el cuerpo}\\
\text{El aprendiz:} & \text{la lógica interna}\\
\text{La resolución:} & \text{la teoría del problema}\\
\text{El simbolismo:} & \text{la sintaxis y la semántica}\\
\text{El conocedor:} & \text{la mente resolutiva}\\
\text{El sujeto:} & \text{la consciencia y el yo}\\
\text{La solución:} & \text{una epistemología subjetiva}
\end{array}\right.
$$

El adaptador

El adaptador $\mathcal{A}_1$ se compone de dos partes: un cuerpo capaz de varios comportamientos y un gobernador que decide en cada momento y circunstancia cuál de los comportamientos debe ejecutar el cuerpo. Para que este adaptador $\mathcal{A}_1$ aventaje al mecanismo $\mathcal{A}_0$, es suficiente que se cumplan dos requisitos:

- que uno de los comportamientos del cuerpo sea el comportamiento del mecanismo $\mathcal{A}_0$, lo cual se expresa técnicamente diciendo que el cuerpo del adaptador debe ser una ampliación del mecanismo $\mathcal{A}_0$, y
- que el gobernador del adaptador sepa elegir tal comportamiento cuando el universo $\mathcal{U}$ al que se enfrenta es uno que solucionaba el mecanismo; a este requisito lo denominamos *condición de adaptación*.

El aprendiz

La condición de adaptación es resuelta por el adaptador simple empleando el procedimiento de tanteo, esto es, probando contra el universo $\mathcal{U}$ los varios comportamientos de los que es capaz su cuerpo, hasta que encuentra uno lo bastante bueno. El aprendiz $\mathcal{A}_2$ es un adaptador más complejo, que añade la posibilidad de predecir el resultado de los comportamientos sin tener que sufrir las consecuencias de ejecutarlos, pero entonces necesita una lógica interna en la que llevar a cabo tales cálculos. Para hacer las predicciones el aprendiz $\mathcal{A}_2$ ha de buscar un modelo, al que denominamos realidad $\mathcal{R}$, que sustituya al universo $\mathcal{U}$ exterior en la lógica interna. Lo que se pide a este modelo $\mathcal{R}$ es que cumpla la *condición de modelación*, o sea, que dada una secuencia de acciones produzca las mismas reacciones que produciría el universo $\mathcal{U}$, o, dicho técnicamente, la realidad $\mathcal{R}$ debe ser indistinguible del universo $\mathcal{U}$. La otra condición necesaria para que el aprendiz $\mathcal{A}_2$ mejore al adaptador $\mathcal{A}_1$ es la llamada *condición de aprendizaje*, que se cumple si el aprendiz $\mathcal{A}_2$ soluciona en su lógica interna el problema aparente ya interiorizado en el que la realidad $\mathcal{R}$ interior sustituye al universo $\mathcal{U}$ exterior.

La teoría del problema

La teoría del problema, §4, es la clave del libro. Define problema como una condición puesta a cierta libertad, solución como aquel uso de la libertad que satisface la condición, y resolución como el proceso de búsqueda de la solución. Además descubre tres formas básicas de resolución, la solución conocida, el tanteo y la traslación o analogía, que pueden combinarse en árboles de resolución más complejos. Es importante advertir que los problemas aparentes, que no tienen una solución *a priori*, sí admiten resoluciones *a priori*. Es decir, que, aunque no es posible determinar *a priori* si un comportamiento será o no más provechoso que otro, sí se puede mostrar *a priori* que, para enfrentarse a un problema aparente, algunas estrategias de actuación son mejores que otras, y por esto hemos podido mostrar que el aprendizaje es mejor que la adaptación. De manera que el mecanismo $\mathcal{A}_0$, el adaptador $\mathcal{A}_1$ y el aprendiz $\mathcal{A}_2$ son resolutores capaces de un modo específico de resolución cada uno de ellos. Constituyen, además, una secuencia evolutiva en continua mejora, siempre y cuando se cumplan las condiciones de adaptación, de modelación y de aprendizaje. De la teoría del problema se sigue la manera de proseguir esta evolución de resolutores: el conocedor $\mathcal{A}_3$ debe ser capaz de varios modos de resolver, incluyendo el del mecanismo $\mathcal{A}_0$, el del adaptador $\mathcal{A}_1$ y el del aprendiz $\mathcal{A}_2$. Por otra parte, si la lógica interna del conocedor fuera capaz de representar problemas, soluciones y resoluciones, como veremos luego que es el caso de las lógicas simbólicas, entonces este conocedor simbólico sería capaz de desarrollar internamente una evolución resolutiva. Es recomendable leer directamente la sección cuarta, §4, en la que se pueden encontrar explicaciones aumentadas de todos estos conceptos.

La lógica simbólica

Una lógica simbólica es aquélla con dos niveles, uno sintáctico en el que habitan las expresiones con sus símbolos y sus nombres, y el otro semántico, más primario, que es una lógica completa y en el que han de estar las soluciones. Si se trata del problema aparente, y la lógica en la que se plantea es el álgebra de autómatas, entonces las soluciones son comportamientos. Se muestra, en la §5, que una lógica simbólica es capaz de representar problemas, soluciones y resoluciones, tanto los tres modos básicos de resolución como las composiciones en forma de árboles de resolución más complejos. Se muestra que tanto el problema como la resolución son conceptos necesariamente sintácticos. En este punto, al mostrarse que la libertad es un concepto sintáctico y que la lógica simbólica es el lenguaje de los problemas, es donde queda superado el materialismo. Por añadidura, esta explicación de la lógica simbólica desde el paradigma del problema permite discernir cuáles son los elementos básicos de sus expresiones: los nombres, las variables y las incógnitas, las condiciones booleanas, los conjuntos, con sus elementos, su relación de pertenencia y sus cuantificadores, y los algoritmos transformadores de expresiones. Por último, interpretando la lógica simbólica como el soporte expresivo de los problemas, las soluciones y las resoluciones, asuntos siempre sospechosos como las paradojas y los problemas descubiertos por GÖDEL en los formalismos matemáticos reciben una explicación natural.

El conocedor

El conocedor $\mathcal{A}_3$ es un resolutor que mejora al aprendiz $\mathcal{A}_2$, al adaptador $\mathcal{A}_1$ y al mecanismo $\mathcal{A}_0$, porque es capaz de las maneras de resolver de éstos y, además, de otras. El conocedor se divide en dos partes: el ánima, que decide cuál de los modos de resolución aplicar, y la mente, que resuelve a la manera determinada por el ánima. Para que el conocedor mejore al aprendiz, su ánima debe elegir el modo de resolución del aprendiz cuando se enfrente a un universo $\mathcal{U}$ que el aprendiz solucionaba, e igualmente, *mutatis mutandis*, en los casos del adaptador y del mecanismo. Ésta es la condición de conocimiento. Si el conocedor es simbólico, entonces su mente simbólica es capaz de todas las maneras de resolver, y el problema del ánima es tan complejo que debería contar con todos los recursos de resolución que la teoría del problema descubre. Pero este problema tiene una solución fácil en el caso del conocedor simbólico, ya que su característica consiste, precisamente, en disponer de todos los recursos de resolución. Para ello es imprescindible que también el ánima esté construida sintácticamente. De aquí se concluye que el conocedor simbólico se mostrará, única y exclusivamente, como un motor sintáctico.

El sujeto

El sujeto es un conocedor simbólico que se enfrenta a un problema complejo. Para ello debe ser capaz de resolver varios subproblemas simultáneamente. Para dar coherencia y unidad a este resolutor múltiple, ha de estar construido jerárquicamente, de modo que exista un nivel superior, la consciencia, que sea único. A la consciencia sólo llega, en cada momento, un único problema, aquél más difícil y que ha pasado todos los filtros interpuestos en su camino ascendente. La solución del problema simbólico que alcanza la consciencia del sujeto es su yo, de manera que la tarea de la consciencia consiste en definir ese yo. Como el yo ocupa el lugar de la incógnita a determinar en el problema del sujeto, el sujeto experimenta el yo como libre.

Las consecuencias

La §8 postula que los fundamentos de todo nuestro saber y conocimiento son la apariencia y el deseo de vivir, que son las dos partes del problema aparente, y elabora algunas de las consecuencias filosóficas. Una de las más controvertidas puede ser la que atañe al orden jerárquico de las ciencias, ya que, según el argumento presentado, la biología explica la lógica simbólica y las matemáticas, por lo que sería más fundamental que ellas. Pero ya que el argumento es matemático, lo que resulta es un orden circular o, mejor, de dependencias mutuas. Recomendamos la lectura completa de la sección octava, §8, donde pueden encontrarse otras importantes consecuencias.

El título

Lo aparente ('apparent') es, en inglés, lo obvio, acusando el idioma la influencia de la filosofía empirista británica. En castellano, aun siendo la raíz de la palabra la misma, lo aparente es lo que parece pero no es, y aparentar es una manera de engañar. "El problema aparente" está escrito, aparentemente, en el idioma equivocado.

Palabras clave

Las ideas fundamentales de la teoría presentada son: problema, conocimiento, evolución, simbolismo, autómata, lógica, adaptación, aprendizaje, semántica y sintaxis.

II. El problema aparente

1 El problema

1.1 El planteamiento

Buscamos la solución del problema aparente. El *problema aparente* plantea la búsqueda de beneficio en la interacción.

La caja negra

La definición anterior es exacta y suficiente si ya se tiene el concepto, pero inescrutable si no se posee, por lo que es necesaria una aclaración.

Una forma simple de representarnos el problema aparente es la de suponer que nos enfrentamos a una *caja negra*[40] cuyo funcionamiento ignoramos por completo, cuyo interior es inaccesible y de la que queremos obtener alguna utilidad que justifique el alto precio que hemos pagado por ella. Querremos descubrir cómo usarla con provecho, y para ello ejerceremos acciones sobre la caja negra y observaremos detalladamente sus reacciones.

Pero la caja negra es excesiva en un punto. En el problema aparente todo lo que tenemos es la *apariencia*, también llamada *interacción*, es decir, la posibilidad de actuar y de observar. La caja negra supone que tenemos algo más, a saber, la delimitación precisa de lo que interesa, porque hemos limitado la investigación a la propia caja negra, mientras que en el problema aparente todo está por hacer.

Llamando *entorno* exterior a lo que no es la solución del problema aparente, podemos distinguir dos tipos de interacción: la *acción* que la solución ejecuta sobre el entorno exterior, y la *reacción* que, procedente del entorno exterior, percibe la solución. Hay libertad para determinar las acciones. Algunas reacciones son buenas, otras no. De lo que media desde las acciones hasta las reacciones nada se sabe, y aun es desconocido si media algo o no. Una solución del problema aparente es una determinada definición de qué acciones deben ejecutarse en cada momento y circunstancia, tal que las reacciones percibidas son buenas.

---

[40] Klir, G.J. (1969): *Teoría General de Sistemas.*

1.2 La lógica

Nos limitaremos a la resolución del problema aparente en una lógica. Llamamos *lógica* a la totalidad de lo posible[41]. En concreto, la lógica contiene todas las representaciones posibles o imaginables. La lógica aquí elegida es el álgebra automática.

Las razones de la elección

La formulación hecha del problema aparente es demasiado general para que pueda ser examinado sistemáticamente. De modo que, al menos, deben quedar establecidas qué soluciones son posibles o, dicho de otro modo, qué soluciones son aceptables.

Puesto que las soluciones del problema aparente deben expresar maneras de interaccionar y que la interacción es la sucesión en el tiempo de acciones y reacciones, toda lógica que aspire a describir las soluciones del problema aparente ha de acomodar el tiempo. El álgebra automática es temporal, y por tanto válida, pero también podrían ser utilizadas otras lógicas, como el cálculo diferencial.

Introducir una lógica en este punto es necesario. Aun así, se debe recordar en todo momento que la lógica elegida, sea ésta cual sea, repercutirá decisivamente sobre toda la investigación subsiguiente. Por ejemplo, que la lógica utilice objetos, composiciones de objetos y relaciones entre objetos, hace que éstos sean conceptos básicos. Pero los hace básicos la lógica, no el problema aparente.

1.3 El álgebra automática

El *álgebra automática* tiene como objetos los autómatas binarios y probabilísticos. Permite tres operaciones sobre los autómatas: la composición en serie, la composición en paralelo y la composición de realimentación. Varias son las relaciones que pueden establecerse entre los autómatas, siendo las principales la igualdad, la indistinguibilidad y la ampliabilidad.

El detalle del álgebra automática se muestra en el Anexo A.

Un resumen del álgebra automática

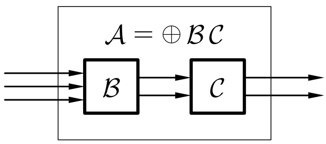
Quien no quiera desviar aquí su atención para dedicarla al estudio del álgebra automática, puede servirse de este pequeño resumen que sólo trata del caso determinístico.

Un autómata $\mathcal{A}$, para el álgebra automática, es un objeto que tiene $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$ variables binarias de entrada, $\mathbf{O}_{\mathcal{A}}$ variables binarias de salida

[41] Wittgenstein, L. (1922): *Tractatus Logico-Philosophicus.*

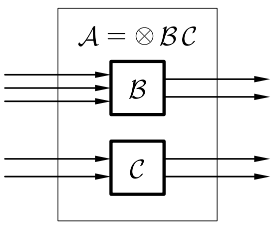
y $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}$ variables binarias de estado, tal que los valores que toman en este instante las variables de salida y los valores que tomarán en el instante siguiente las variables de estado dependen de los valores que toman en este instante las variables de entrada y las variables de estado. Las variables de entrada son independientes: sus valores los determina el entorno, y no el autómata.

La composición en serie de dos autómatas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ será un autómata $\mathcal{A}$, notado $\mathcal{A} = \oplus\mathcal{B}\,\mathcal{C}$. La composición en serie sólo se puede realizar si el número de variables de salida del primer autómata, $\mathbf{O}_{\mathcal{B}}$, es igual al número de variables de entrada al segundo autómata, $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$, o sea, si $\mathbf{O}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}$, ya que el funcionamiento de la composición en serie es el que se obtiene de aplicar la entrada a la composición a la entrada al primero, $\mathcal{B}$, y la salida de éste a la entrada al segundo, $\mathcal{C}$, siendo la salida de éste la salida de la composición. El estado de la composición es el estado del primero y el estado del segundo de los autómatas de la composición. Así que se tienen las siguientes igualdades: $\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}$, $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{O}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{S}_{\mathcal{A}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + \mathbf{S}_{\mathcal{C}}$.



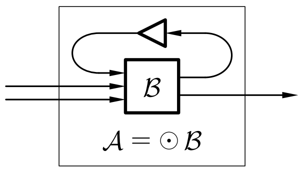
Composición en serie

La composición en paralelo de dos autómatas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ será un autómata $\mathcal{A}$, notado $\mathcal{A} = \otimes\mathcal{B}\,\mathcal{C}$. El autómata compuesto, $\mathcal{A}$, funciona aplicando sus primeros $\mathbf{I}_{\mathcal{B}}$ valores de entrada al primer autómata, $\mathcal{B}$, y sus otros $\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$ valores de entrada al segundo autómata, $\mathcal{C}$, y devolviendo como sus $\mathbf{O}_{\mathcal{B}}$ primeros valores de salida los que salen del autómata $\mathcal{B}$, y como sus otros $\mathbf{O}_{\mathcal{C}}$ valores de salida los que salen del autómata $\mathcal{C}$. El estado de la composición es el estado del primero y el estado del segundo de los autómatas de la composición. Así que se tienen las siguientes igualdades: $\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}+\mathbf{I}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{O}_{\mathcal{B}}+\mathbf{O}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{S}_{\mathcal{A}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}}+\mathbf{S}_{\mathcal{C}}$.



Composición en paralelo

La composición de realimentación del autómata $\mathcal{B}$ será un autómata $\mathcal{A}$, notado $\mathcal{A} = \odot\mathcal{B}$. El autómata compuesto, $\mathcal{A}$, funciona haciendo que el valor de la primera variable de entrada al autómata sin componer, $\mathcal{B}$, sea el valor que tomó en el instante anterior la primera variable de salida del autómata sin componer, $\mathcal{B}$. Es así que el estado de la composición es el estado del autómata sin componer además de una variable de estado adicional que sirve para recordar cual fue el valor en el instante anterior de la primera variable de salida. De manera que sólo se puede realimentar un autómata $\mathcal{B}$ si tiene, al menos, una variable de entrada y una variable de salida, $\mathbf{I}_\mathcal{B} > 0$, $\mathbf{O}_\mathcal{B} > 0$. Además se tienen las siguientes igualdades: $\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B} - 1$, $\mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{B} - 1$, $\mathbf{S}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B} + 1$.



Composición de realimentación

Dos autómatas son iguales cuando sus definiciones coinciden, de modo que, entre otras cosas,

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Longrightarrow (\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B}) \wedge (\mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{B}) \wedge (\mathbf{S}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B}).$$

Dos autómatas son indistinguibles cuando, por observación de sus variables externas, las de entrada y las de salida pero no las de estado, es imposible determinar cuál es cual. En estas circunstancias se dice que ambos autómatas tienen el mismo comportamiento. Se tiene, entre otras cosas,

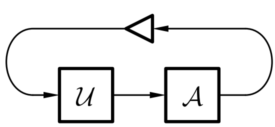
$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{A} \approx \mathcal{B},$$
$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \Longrightarrow (\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B}) \wedge (\mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{B}).$$

1.4 El problema aparente en el álgebra automática

1.4.1 La ecuación de supervivencia

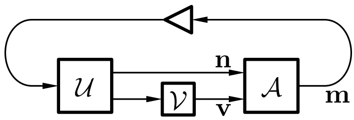
Presentada la lógica, ahora formalizaremos el problema en la lógica, es decir, formularemos el problema aparente en el aparato lógico proporcionado por el álgebra automática.

La manera de expresar la *interacción total* de dos autómatas, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{A}$, en el álgebra automática es $\odot^{\mathbf{O}_\mathcal{A}} \oplus \mathcal{U}\,\mathcal{A}$. También valdría $\odot^{\mathbf{I}_\mathcal{A}} \oplus \mathcal{A}\,\mathcal{U}$.



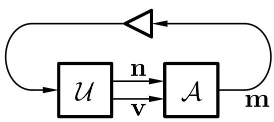
Interacción total

Para la solución $\mathcal{A}$, los beneficios obtenidos de su interacción con el *universo* $\mathcal{U}$, que es su entorno, sólo pueden ser debidos a los valores de las variables de entrada a él. Suponiendo que la semántica $\mathcal{V}$ trata algunos de los valores de entrada a $\mathcal{A}$ de modo que cada valor 1 a la salida de $\mathcal{V}$ significa bien y cada valor 0 a la salida de $\mathcal{V}$ significa mal, y siendo las variables sin significado, o neutras, las $\mathbf{n}$ primeras, podemos expresar la interacción significativa como: $\odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathcal{U} \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}} \mathcal{V}\,\mathcal{A}$, con $\mathbf{m} = \mathbf{O}_{\mathcal{A}}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{O}_{\mathcal{V}}$.



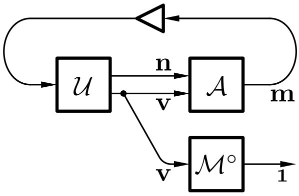
Interacción significativa

Si el autómata $\mathcal{A}$ no tiene conocimiento de la forma de $\mathcal{V}$, suposición que denominaremos *hipótesis del significado aparente*, entonces la situación toma la forma de la interacción total, pero distinguiendo, en las reacciones desde $\mathcal{U}$ hasta $\mathcal{A}$, dos tipos de variables: las significativas, en las que el valor 1 significa bien y el valor 0 mal, y las neutras, que son el resto. Llamaremos *interacción total con semántica mínima* a ésta, que es la que estudiaremos en lo que sigue, aunque no es la única posible. Sin variables significativas el problema aparente no tiene urgencia alguna, o dicho más dramáticamente, no tiene sentido ni significado. De aquí el nombre de semántica mínima dado a aquélla con sólo dos significados, bien y mal.



Interacción total con semántica mínima

Para medir externamente si $\mathcal{A}$ es solución del problema, necesitamos comparar contra una referencia el beneficio que obtiene. Sea una *medición* $\mathcal{M}^\circ$ un autómata que, tomando a su entrada las variables significativas, las trata de manera que su única variable de salida toma el valor 1 si considera que el beneficio obtenido hasta el momento es suficiente y el valor 0 en otro caso. Estamos ante la disposición que se muestra a continuación.



Interacción total con semántica mínima y medida externa

Esta disposición puede escribirse algebraicamente, siendo $\mathbf{n}$ el número de variables neutras, $\mathbf{v}$ el número de variables significativas (de modo que $\mathbf{n}+\mathbf{v}=\mathbf{I}_{\mathcal{A}}$) y $\mathbf{m}=\mathbf{O}_{\mathcal{A}}$, como:

$$\odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathcal{U} \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{v}} \otimes \mathcal{A}\, \mathcal{M}^{\circ}.$$

Podemos ya formalizar el problema aparente en el álgebra automática del siguiente modo:

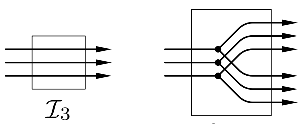
$$\mathcal{A}?\ \forall \mathcal{U}:\ \odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathcal{U} \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{v}} \otimes \mathcal{A}\, \mathcal{M}^{\circ} \approx \mathrm{K1}\,.$$

En castellano esta expresión puede leerse así: hallar aquel autómata $\mathcal{A}$ tal que, al interaccionar totalmente con cualquier entorno $\mathcal{U}$ y aplicar al beneficio una medición $\mathcal{M}^{\circ}$ dada, sea indistinguible del autómata que en cada instante produce un valor de salida 1. Una medición $\mathcal{M}^{\circ}$ típica promediará la valoración y comparará el promedio obtenido contra un valor de referencia.

Daremos el nombre de *ecuación de la supervivencia* a la indistinción central del problema aparente. También llamaremos *problema de la supervivencia* al problema aparente, y diremos que el autómata $\mathcal{A}$ sobrevive si lo soluciona y que muere en caso contrario.

1.4.2 Encaminamiento

Los autómatas $\mathcal{I}_n$ y FORK_n son dos funciones de encaminamiento. Llanamente, $\mathcal{I}_n$ es aquel autómata que repite n variables y FORK_n el que duplica n variables. Las figuras deben ser suficientes para entender los autómatas propuestos, pero si no es así, entonces es necesario acudir al Anexo A (§A.6.2).



$\mathcal{I}_3$ FORK_3 **Encaminamiento**

1.4.3 Importa el comportamiento

Siendo $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ una función automática en el autómata $\mathcal{X}$, se tiene que:

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \approx \mathcal{F}(\mathcal{B}),$$

ya que si $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ fuera distinguible de $\mathcal{F}(\mathcal{B})$, entonces también habríamos distinguido a $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$. La demostración completa se encuentra en la §A.5.6.

Dada la naturaleza del problema aparente se deduce, pues, que si el autómata $\mathcal{B}$ sobrevive en el universo $\mathcal{U}$, entonces cualquier autómata $\mathcal{C}$, tal que $\mathcal{C} \approx \mathcal{B}$, también sobrevive en el universo $\mathcal{U}$. Es decir, que lo que importa de la solución es su comportamiento y no su forma.

1.5 Resolución general del problema aparente

Para expresar que sólo la apariencia es conocida y que nada se sabe de lo que media desde las acciones hasta las reacciones, escribimos en el problema aparente que el entorno o universo $\mathcal{U}$ podía ser cualquiera, $\forall \mathcal{U}$. Como consecuencia, en el álgebra automática existen universos que hacen imposible la solución del problema de la supervivencia. Por ejemplo, si:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \oplus \otimes^{\mathbf{O}_\mathcal{A}} \text{SINK} \otimes^{\mathbf{I}_\mathcal{A}} \text{K0}\,.$$

Porque este universo $\mathcal{U}_0$ produce siempre e independientemente de los valores de sus variables de entrada, y no tiene variables de estado, o sea, independientemente de todo, valores 0 en todas sus variables de salida.

El caso contrario se da si:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \oplus \otimes^{\mathbf{O}_\mathcal{A}} \text{SINK} \otimes^{\mathbf{I}_\mathcal{A}} \text{K1}\,.$$

En este caso afortunado, el autómata $\mathcal{A}$, sea éste cual sea, es solución del problema.

Es así que el problema de la supervivencia ya tiene un resultado: no existe un autómata $\mathcal{A}$ capaz de sobrevivir en cualquier universo $\mathcal{U}$, aunque cualquier autómata $\mathcal{A}$ es capaz sobrevivir en algún universo $\mathcal{U}$.

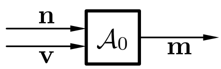
Eliminada toda posibilidad de una solución absoluta del problema aparente, el camino a seguir será el de la búsqueda de soluciones relativamente mejores. Consideraremos que una solución $\mathcal{A}_{n+1}$ es tan buena o *mejor solución* que otra $\mathcal{A}_n$ si la primera, $\mathcal{A}_{n+1}$, soluciona el problema contra todos los entornos solucionados por la segunda, $\mathcal{A}_n$. Lo notaremos $\mathcal{A}_{n+1} \succeq \mathcal{A}_n$.

Más informalmente lo que pretende el problema de la supervivencia es hallar un autómata $\mathcal{A}$ que en (casi) cualquier universo $\mathcal{U}$ obtenga (casi) siempre buenas valoraciones, o sea, valores 1.

1.6 La referencia

Hechas estas consideraciones podemos proponer una primera solución. Esta solución no tiene nada especial, pero nos servirá como referencia para obtener mejores soluciones. Llamaremos *mecanismo* a esta solución de referencia, y la anotaremos como $\mathcal{A}_0$.

Sabemos que, por malo que sea, el mecanismo $\mathcal{A}_0$ soluciona el problema de la supervivencia, al menos, si el universo al que se enfrenta es $\mathcal{U}_1$.



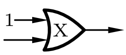
Mecanismo
$\mathcal{A}_0$

2 El adaptador

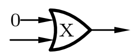
2.1 Definición

Si fijamos a 1 el valor de una variable de entrada a un autómata, entonces el autómata restante, que tiene una variable de entrada menos, tendrá un cierto comportamiento. Si la fijamos a 0 obtendremos, en general, un comportamiento diferente.

Por ejemplo, el autómata XOR puede funcionar como el inversor de bits NOT fijando a 1 una de sus variables de entrada, o puede funcionar transparentemente, como $\mathcal{I}$, fijándola a 0.



$\oplus \otimes \mathrm{K}1 \mathcal{I}\, \mathrm{XOR} = \mathrm{NOT} \qquad \mathcal{I} = \oplus \otimes \mathrm{K}0 \mathcal{I}\, \mathrm{XOR}$



Decimos que el autómata XOR es una ampliación del autómata NOT, XOR $\triangleright$ NOT, porque existe un valor de entrada a XOR que hace que el resto del autómata se comporte como NOT. Por la misma razón el autómata XOR es una ampliación del autómata $\mathcal{I}$, XOR $\triangleright \mathcal{I}$.

La definición completa del concepto de ampliación se encuentra en el Anexo A (véanse las secciones §A.4.10 y §A.5.5). Aquí sólo recordaremos que $\mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{B})$, utilizado en la definición de ampliación, es el autómata que resulta al forzar que las $\mathbf{g}$ primeras variables de entrada al autómata $\mathcal{B}$ tomen los valores correspondientes al índice x. Por ejemplo:

$$\mathrm{Syntax}(1, 1, \mathrm{XOR}) = \oplus \otimes \mathrm{K}1 \mathcal{I}\, \mathrm{XOR} = \mathrm{NOT}\,.$$

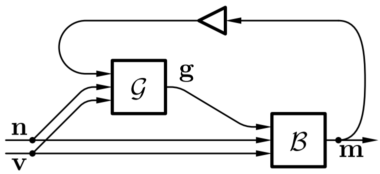
Luego si $\mathcal{B} \triangleright \mathcal{A}$, entonces para cierto valor b, $\mathrm{Syntax}(b, \mathbf{I}_{\mathcal{B}} - \mathbf{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) \approx \mathcal{A}$, pero en general, para otros valores c, $\mathrm{Syntax}(c, \mathbf{I}_{\mathcal{B}} - \mathbf{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) \not\approx \mathcal{A}$. En este sentido decimos que la ampliación $\mathcal{B}$ es capaz de más comportamientos, y por lo tanto es más versátil, que su original $\mathcal{A}$.

De manera que si encontramos un autómata $\mathcal{B}$, al que llamaremos *cuerpo*, que sea una ampliación de la solución de referencia $\mathcal{A}_0$, o sea, si $\mathcal{B} \triangleright \mathcal{A}_0$, entonces tenemos la posibilidad de construir un autómata que solucione mejor que $\mathcal{A}_0$ el problema aparente. La condición para que esto ocurra, que denominaremos *condición de adaptación*, es que la otra parte de tal autómata, parte a la que denominaremos *gobernador* en honor a MAXWELL y que notaremos $\mathcal{G}$, sea capaz de elegir el valor b cuando se encuentre ante un universo $\mathcal{U}$ en el que $\mathcal{A}_0$ sobreviviría. Para que pueda cumplir la condición de adaptación, el gobernador debe contar con la información precisa, por lo que, proporcionándole toda la información que es posible suministrarle, o sea, toda la apariencia del universo $\mathcal{U}$, llegamos a la definición de adaptador.

Un *adaptador*, notado $\mathcal{A}_1$, es un autómata que tiene la forma:

$$\oplus\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{n+v}}\,\odot^{\mathbf{m}}\,\oplus\,\oplus\,\otimes\,\mathcal{G}\,\mathcal{I}_{\mathbf{n+v}}\,\mathcal{B}\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{m}},$$

siendo $\mathcal{B}\triangleright\mathcal{A}_0$ y cumpliendo $\mathcal{G}$ la condición de adaptación.



Adaptador
$\mathcal{A}_1$

2.2 Una clasificación

2.2.1 Según las influencias

El gobernador $\mathcal{G}$ recibe dos influencias: una procedente del cuerpo $\mathcal{B}$ y la otra del exterior. Si se prescinde de la influencia recibida desde el cuerpo $\mathcal{B}$, tenemos el *adaptador directo*, o no realimentado. La influencia externa es, como sabemos, de dos tipos: neutra y significativa. Si se prescinde de la influencia neutra, tenemos el *adaptador gobernado por significados*; si se prescinde de la influencia significativa tenemos el adaptador de gobierno neutro. Si se prescinde de ambas tenemos el adaptador de gobierno ciego. Los adaptadores de gobierno neutro y ciego son casos degenerados de adaptador.

El cuerpo $\mathcal{B}$ recibe dos influencias: del exterior y del gobernador $\mathcal{G}$. Si se prescinde de la influencia externa tenemos el *actuador*. Si se prescinde de la influencia del gobernador $\mathcal{G}$, entonces éste no tiene influencia sobre elemento alguno, por lo que tenemos otro caso degenerado de adaptador.

Nótese que, por ejemplo, la influencia externa que recibe el cuerpo $\mathcal{B}$ es a través de $\mathrm{FORK}_{\mathbf{n+v}}$ y de $\mathcal{I}_{\mathbf{n+v}}$. Es decir, que en este modo de hablar las funciones de encaminamiento se limitan a repetir o a transmitir una influencia.

El adaptador directo toma la forma: $\oplus\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{n+v}}\,\oplus\,\otimes\,\mathcal{G}\,\mathcal{I}_{\mathbf{n+v}}\,\mathcal{B}$. El actuador es: $\odot^{\mathbf{m}}\,\oplus\,\oplus\,\mathcal{G}\,\mathcal{B}\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{m}}$, y el actuador directo: $\oplus\,\mathcal{G}\,\mathcal{B}$.

2.2.2 Según la universalidad

Interesa, en general, que el cuerpo $\mathcal{B}$ del adaptador sea muy universal, o sea, capaz de muchos comportamientos diferentes. El gobernador $\mathcal{G}$, en este caso, tiene un espacio de comportamientos mucho más amplio que explorar, de modo que la tarea del gobernador $\mathcal{G}$ puede ser ardua si la estructura del universo $\mathcal{U}$ es tal que la gran mayoría de los comportamientos son malos. Por contra, en el caso de los adaptadores poco universales, la labor del gobernador $\mathcal{G}$ puede ser mucho más sencilla. Ahora bien, también es posible que el rango de comportamientos del adaptador sea entonces tan corto que ninguno de ellos sea lo suficientemente bueno.

2.2.3 Según el lenguaje

Entre el gobernador $\mathcal{G}$ y el cuerpo $\mathcal{B}$ del adaptador está definido un lenguaje, en el que a la combinación de valores c de las $\mathbf{g}$ variables de salida del gobernador $\mathcal{G}$ le corresponde el significado $\mathrm{Syntax}(c, \mathbf{g}, \mathcal{B})$.

Nótese que si entre el gobernador $\mathcal{G}$ y el cuerpo $\mathcal{B}$ no estuviera definido un lenguaje, supuesto que llamaremos *hipótesis del cuerpo aparente*, entonces el cuerpo no sería otra cosa que la parte más cercana del universo exterior $\mathcal{U}$.

2.3 El homeostato

El homeostato de Ashby[42] es un gobernador $\mathcal{G}$ sencillo. El homeostato va monitorizando el beneficio obtenido y, mientras éste se encuentra por encima de un cierto umbral, no varía su salida hacia el cuerpo $\mathcal{B}$, lo cual significa que el comportamiento global del adaptador no varía. Si el beneficio baja del umbral, entonces el homeostato cambia aleatoriamente su salida hacia el cuerpo $\mathcal{B}$. Esto asegura que sólo son estables aquellos comportamientos que obtienen beneficios superiores al umbral establecido. Según nuestra clasificación, el adaptador homeostático es un adaptador directo y gobernado por significados.

Quizás el mayor problema del homeostato es que, cada vez que falla un comportamiento, el siguiente que es probado se genera de una manera completamente aleatoria y sin tener en cuenta la historia pasada.

[42] Ashby, W.R. (1956): *Introducción a la Cibernética*.

2.4 Adaptadores con traducción

Otra forma de construir un adaptador, procurando aprovechar la historia pasada, parte del supuesto de que comportamientos parecidos tendrán valoraciones parecidas, supuesto al que damos el nombre de *hipótesis de continuidad en el significado de los comportamientos.* Bajo esta hipótesis, podemos planear que la búsqueda del mejor comportamiento se haga en pasos cortos, es decir, quedándose siempre en las inmediaciones del comportamiento actual. De esa manera nunca empeorará demasiado el beneficio y, si persistimos en la mejora, llegaremos a un máximo. Y si no existen máximos locales, entonces este máximo es el óptimo.

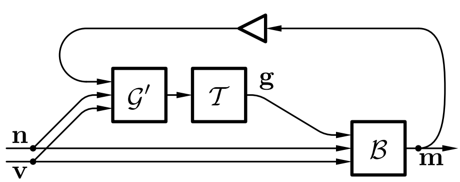
En esta situación parece más interesante hablar en términos de diferencias de comportamientos que de comportamientos absolutos. Así que el gobernador ordenará variar el comportamiento actual en determinada dirección, en vez de ordenar el comportamiento preciso a ejecutar. O sea, indicará la diferencia entre el comportamiento que desea y el comportamiento actual.

Pero teóricamente se puede hablar indistintamente en diferencias y en absolutos merced al empleo de integradores y diferenciadores. Un integrador convierte diferencias en absolutos y un diferenciador convierte absolutos en diferencias.

Usando los autómatas integradores y diferenciadores adecuados podemos acoplar cualesquiera gobernador y cuerpo, ya sea que se refieran a los comportamientos como diferencias respecto al actual o se refieran absolutamente a ellos. En este sentido entenderemos que actúan como traductores del lenguaje hablado por el gobernador al lenguaje entendido por el cuerpo.

Teóricamente es indiferente suponer que el traductor $\mathcal{T}$ es la última etapa del gobernador $\mathcal{G}$ o la primera del cuerpo $\mathcal{B}$, pero si lo que se pretende es señalar que existe una traducción, entonces tenemos el *adaptador con traductor*, que toma la forma:

$$\oplus\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{n+v}}\,\odot^{\mathbf{m}}\,\oplus\oplus\otimes\oplus\,\mathcal{G}'\,\mathcal{T}\,\mathcal{I}_{\mathbf{n+v}}\,\mathcal{B}\,\mathrm{FORK}_{\mathbf{m}}\,.$$



Adaptador con traductor

2.5 Autómatas estocásticos

Los autómatas estocásticos[43] son actuadores con traductor. Cada comportamiento de que es capaz el cuerpo $\mathcal{B}$ del autómata estocástico consiste en generar, con una determinada probabilidad pero independientemente de entradas y estados, salidas de valor 1. De modo que estos comportamientos pueden ordenarse, desde aquél que no produce ninguna salida de valor 1 (probabilidad 0) hasta aquél que las produce siempre (probabilidad 1).

El gobierno de este cuerpo es sencillo. Por ejemplo, si la salida anterior fue 1 y la reacción del universo $\mathcal{U}$ fue mala, primero el gobernador $\mathcal{G}$ determina que debe aplicarse un comportamiento con menor probabilidad de generar valores 1; entonces el traductor $\mathcal{T}$, que es un integrador, calcula cuál es el comportamiento contiguo al actual pero con menor probabilidad de generar valores 1, y éste es el comportamiento que por fin ejecuta el cuerpo $\mathcal{B}$.

2.6 Autómatas de comportamiento variable

Existen muchos esquemas adaptativos que lo único que aportan es un autómata de comportamiento variable o, en nuestra terminología, el cuerpo de un adaptador. Para que este cuerpo pueda ser útil, ha de venir provisto de un lenguaje. Y si el lenguaje es diferencial la operación es más fácil.

La utilización autónoma de un cuerpo diferencial requiere de una fase previa de entrenamiento o de prueba durante la cual se supervisa su comportamiento. En esta fase de prueba se utilizan las entradas de gobierno al cuerpo de manera que se va acomodando el comportamiento del cuerpo al deseado por el supervisor. Una vez finaliza esta fase y comienza la fase autónoma, se ausenta el supervisor y la entrada de gobierno se fija a cero (para que el comportamiento no cambie). Es decir, el entrenamiento determina el comportamiento deseado para la posterior utilización autónoma del cuerpo.

Dentro de este grupo se encuentran los esquemas conexionistas (o redes de neuronas formales), los inductivos (que generan, a partir de ejemplos y contraejemplos, reglas de clasificación) y, en general, todos aquéllos en los que se diferencia una fase de entrenamiento, supervisada, de otra fase autónoma o no supervisada durante la cual ya no se producen cambios de comportamiento.

---

[43] Narendra, K.S.; Thathachar, M.A.L. (1989): *Learning Automata: An Introduction.*

2.7 El termostato

Por último, y como excepción, desarrollaremos un adaptador en el que la semántica es algo más compleja que la semántica mínima (véase la §1.4.1). El termostato es un conocido adaptador. El termostato típico es una máquina cuyo cometido es mantener, dentro de determinados límites, la temperatura de un cierto lugar. En nuestro caso supondremos que la temperatura deseada es siempre mayor que la temperatura ambiente, por lo cual el termostato precisará activar, en ocasiones, un calefactor que constituye el cuerpo del termostato. Como dato de entrada el termostato dispondrá de la temperatura codificada en dos bits y con tres significados: demasiado alta, buena y demasiado baja, en vez de buena y mala solamente.

El cometido de esta semántica $\mathcal{V}$ será, pues, determinar que calificación, de esas tres, se merece la temperatura que percibe. Para ello definiremos dos temperaturas: T_h o temperatura máxima a la que debe estar el lugar y T_l o temperatura mínima a la que debe estar el lugar. Supondremos que la codificación utilizada por la semántica $\mathcal{V}$ es así: si la temperatura medida T_m es demasiado alta, $T_m > T_h$, entonces usa el código 01; si la temperatura medida es buena, $T_h \geq T_m \geq T_l$, emplea el código 11; y si la temperatura medida es demasiado baja, $T_l > T_m$, usa el código 10.

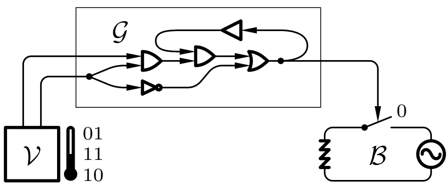
Es decir, el termostato utiliza una semánica no mínima, distinguiendo dos tipos de maldad, la maldad caliente ($T_h < T_m$) y la maldad fría ($T_m < T_l$). Ambas podrían causar la muerte, aunque cada una requiere una acción diferente. Que la semántica $\mathcal{V}$ proporcione esta información más significativa, le ahorra al gobernador $\mathcal{G}$ del termostato la tarea de discriminar el tipo de maldad a la que se enfrenta, discriminación que es necesaria para aplicar a cada maldad el comportamiento específico que la reduce.

Supondremos que el cuerpo $\mathcal{B}$ del termostato es capaz de efectuar dos comportamientos, que codificaremos así: 1 significa ‘calefactor encendido’ y 0 significa ‘calefactor apagado’, luego éste es el lenguaje definido entre el gobernador $\mathcal{G}$ y el cuerpo $\mathcal{B}$. Para mantener la temperatura entre los dos límites fijados, y teniendo en cuenta que sin la intervención del calefactor la temperatura tiende a bajar, la estrategia del termostato será la de encender el calefactor cuando la temperatura sea demasiado baja y apagarlo cuando la temperatura sea demasiado alta. Cuando la temperatura esté entre los límites, mantendrá al calefactor en su estado.

En esta situación, y si el lugar no tuviera inercia térmica, la temperatura subiría, con el calefactor encendido, de T_l a T_h, al llegar a T_h se apagaría el calefactor y la temperatura bajaría de T_h a T_l, pero al llegar a T_l se volvería a encender el calefactor y recomenzaría el ciclo.

El termostato es un actuador directo gobernado por significados.

$$\mathcal{G} = \oplus \oplus \otimes \mathcal{I}\,\mathrm{FORK} \otimes \mathrm{AND}\,\mathrm{NOT} \odot \oplus \oplus \otimes \mathrm{AND}\,\mathcal{I}\,\mathrm{OR}\,\mathrm{FORK}\,.$$



Termostato

2.8 Conclusión

Son adaptadores todos los autómatas capaces de varios comportamientos, y que evalúan estos comportamientos probándolos contra el universo exterior. Es decir, usan el procedimiento de tanteo, o de prueba y error.

Eso significa que cualquier adaptador, para percatarse de la inadecuación de un comportamiento, ha de sufrir las consecuencias de aplicarlo. Solamente cuando el adaptador contrasta el comportamiento contra el exterior obtiene la prueba de que es malo, o bueno. El problema es que pudiera ser tan malo que le provocara la muerte. Y éste es el problema que intentaremos resolver a continuación, con el aprendiz.

3 El aprendiz

3.1 La simulación

3.1.1 La ecuación del adaptador

La tarea del gobernador $\mathcal{G}$ de un adaptador puede ser entendida como la de buscar el comportamiento x del cuerpo $\mathcal{B}$, de los $2^{\mathbf{g}}$ que tienen diferente código, que hace máxima la valoración obtenida por el autómata $\mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{B})$ enfrentado al problema de la supervivencia. Más precisamente, el *problema del adaptador* es:

$$x?\ \forall \mathcal{U} :\ \odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathcal{U} \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{v}} \otimes \mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{B})\mathcal{M}^{\circ} \approx \mathrm{K1}\,.$$

Esta *ecuación del adaptador* está abierta, ya que uno de sus términos es el universo $\mathcal{U}$ exterior. Consiguientemente, el gobernador no tiene otra manera de determinar el valor, mejor o peor, del comportamiento j, o sea, de $\mathrm{Syntax}(j, \mathbf{g}, \mathcal{B})$, que la de utilizar ese comportamiento, necesariamente en el presente, contra el universo $\mathcal{U}$ exterior.

Así que el gobernador del adaptador sólo conoce el significado de los comportamientos que ha probado hasta el presente. Y, por tanto, el gobernador de un adaptador se encuentra, en todo instante, con la siguiente disyuntiva: o bien aplica desde ya el comportamiento mejor de los encontrados, y entonces no prueba otros que podrían ser mejores, o bien aplica un comportamiento nuevo que, si bien podría ser mejor que el mejor de los encontrados hasta el momento, lo más probable es que sea peor.

Ahora podemos añadir, a la definición positiva del adaptador que lo describe como un mecanismo capaz de variar su comportamiento tras probarlo contra el mundo exterior, otra definición, esta vez negativa, que describe al adaptador como aquel mecanismo de comportamiento variable que es incapaz de prever su futuro.

Sin futuro cualquier variación del comportamiento, aun hecha con buenas intenciones, puede resultar mortal. El gobernador, al elegir el comportamiento del adaptador, puede obstinarse en permanecer vivo de la mejor manera encontrada hasta el presente, pero no puede fijarse una estrategia en la que un malestar presente le facilite y le alargue su vida futura.

Sucede que el propósito interno del adaptador, y más concretamente de su gobernador, no coincide con su razón de ser, o propósito externo, que es solucionar el problema de la supervivencia. Esta discrepancia es la causa de las limitaciones del adaptador. Sólo se eliminaría esta discrepancia si la semántica fuera tal que un mejor ahora significase una vida más larga, pero dada la hipótesis del significado aparente, esta suposición es ilícita.

3.1.2 La ecuación del aprendiz

La dificultad del adaptador desaparece encerrando la ecuación del adaptador dentro de una lógica. Es decir, que si todos los términos de la ecuación fueran objetos o representaciones de la lógica del gobernador, entonces podría ser resuelta dentro del gobernador. La realización de esta idea es la que define al aprendiz.

El universo $\mathcal{U}$ es uno de los objetos exteriores al gobernador que aparecen en la ecuación del adaptador, así que lo sustituimos por la *realidad* $\mathcal{R}$, que decimos que es un modelo del universo $\mathcal{U}$. Un *modelo* es la representación lógica de un objeto.

El cuerpo $\mathcal{B}$ es el otro objeto exterior al gobernador que aparece en la ecuación del adaptador. Pero el cuerpo $\mathcal{B}$ es un objeto interior a la solución. Por lo tanto, prescindiendo de la hipótesis del cuerpo aparente, podemos disponer de una réplica del cuerpo $\mathcal{B}$ en el gobernador. Para distinguir al cuerpo $\mathcal{B}$ del adaptador de este cuerpo replicable, denominaremos ejecutor $\mathcal{E}$ al cuerpo del aprendiz, del que el gobernador tiene réplica.

Es así que la ecuación del adaptador interiorizada, a la que llamaremos *ecuación del aprendiz*, queda:

$$x?\ \odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathcal{R} \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{v}} \otimes \mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{E})\mathcal{M}^{\circ} \approx \mathrm{K1}\,.$$

Llamaremos *simulación* al proceso de resolución del problema planteado por la ecuación del aprendiz, o *problema del aprendiz*, y *simulador* $\mathcal{S}$ a la parte del aprendiz que lo realiza.

El propósito interno del simulador $\mathcal{S}$ coincide con el propósito externo, solucionar el problema de la supervivencia, aunque con dos salvedades: es contra un modelo del universo, la realidad $\mathcal{R}$, en vez de ser contra cualquier universo $\mathcal{U}$; y en vez de una solución genérica $\mathcal{A}$, la solución de la solución sólo tiene $2^{\mathbf{g}}$ alternativas posibles, una por cada posible codificación de x en $\mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{E})$. Nótese que el problema del aprendiz *no* es un problema aparente, ya que se puede resolver sin interaccionar con el exterior.

3.1.3 La lógica interna

El simulador $\mathcal{S}$ desarrolla su actividad dentro de su lógica, es decir, dentro del espacio de representaciones definido por su lógica. Conviene distinguir en todo momento esta *lógica interna* del aprendiz de aquella otra *lógica externa* al aprendiz en la que se escribe la ecuación de la supervivencia de la que es solución el aprendiz.

Para que el simulador $\mathcal{S}$ pueda resolver el problema del aprendiz quedándose dentro de un mundo enteramente lógico, ha de estar aislado del exterior. Para ello disponemos al simulador $\mathcal{S}$ entre otros dos autómatas: el modelador $\mathcal{M}$, que a partir de la apariencia del universo $\mathcal{U}$ suministra al simulador $\mathcal{S}$ la mejor representación lógica de tal universo $\mathcal{U}$, a la que hemos denominado realidad $\mathcal{R}$, y el ejecutor $\mathcal{E}$, que interpreta la solución lógica encontrada por el simulador $\mathcal{S}$ y actúa en consecuencia sobre el universo $\mathcal{U}$. Estos dos autómatas efectúan la conversión y desconversión que encapsulan al simulador $\mathcal{S}$ en su mundo lógico.

Ya que el aprendiz es una posible solución del problema aparente, su lógica interna ha de estar contenida en la lógica externa.

3.1.4 Un simulador

La simulación, al ser un proceso interno al aprendiz que puede manejarse a voluntad, puede llevarse tanto al pasado, como al presente, como al futuro. Es decir, que la existencia de una lógica interna le proporciona al aprendiz la posibilidad de prever el futuro. También es de una enorme importancia práctica que la búsqueda del mejor comportamiento puede ser hecha en paralelo. Esto era imposible en el caso del adaptador, porque entonces cada comportamiento había de ser probado contra el único universo $\mathcal{U}$ exterior. Pero sí pueden hacerse réplicas de la realidad $\mathcal{R}$, ya que es un objeto lógico.

Un simulador $\mathcal{S}$ puede ser construido como un conjunto de varios adaptadores de cuerpo $\mathcal{E}$ trabajando en paralelo, y en un tiempo de simulación diferente del tiempo externo, sobre varias réplicas de la realidad $\mathcal{R}$, además de cierta maquinaria adicional para comparar y controlar a los adaptadores del conjunto.

En resumen, disponer de una lógica le permite al aprendiz superar las limitaciones del adaptador. El aprendiz puede simular simultáneamente varios posibles comportamientos y prever su futuro, o sea, elaborar estrategias.

3.2 La modelación

3.2.1 El modelo

Un modelo es la representación lógica de una cosa. Al modelo también se le denomina objeto formal, ya que es un objeto formado según la lógica en base a cierta cosa. Desde dentro de la lógica, el modelo es la descripción de la cosa. La *modelación*, o el *problema de la modelación*, es el proceso que tiene como objetivo hallar la mejor descripción o representación lógica de una cosa. Llamaremos *modelador* $\mathcal{M}$ a la parte del aprendiz que hace la modelación.

En el caso del aprendiz, la modelación tiene como objetivo hallar una representación de la lógica interna que reemplace adecuadamente al universo $\mathcal{U}$, tomando como dato la apariencia del universo $\mathcal{U}$. El modelo del universo $\mathcal{U}$, que denominamos realidad $\mathcal{R}$, será tanto más adecuado cuanto más se parezca el problema del aprendizaje al problema de la supervivencia. La situación óptima se alcanza si la realidad $\mathcal{R}$ es indistinguible del universo $\mathcal{U}$, $\mathcal{R} \approx \mathcal{U}$, ya que entonces el problema del aprendiz es indistinguible del problema aparente de la supervivencia (véase la §1.4.3).

Si la realidad $\mathcal{R}$ es determinística e indistinguible del universo $\mathcal{U}$, o sea, si $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = 0 \wedge \mathcal{R} \approx \mathcal{U}$, entonces la realidad $\mathcal{R}$ es infalible, ya que acierta todas las predicciones. Es decir, que supuesta la sincronización de los estados de $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{U}$, y ante cualquier secuencia de acciones, el modelo $\mathcal{R}$ producirá las mismas reacciones que produciría el universo $\mathcal{U}$ exterior.

Cuando la realidad $\mathcal{R}$ no es determinística, $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} > 0$, se pierde esta equivalencia entre la indistinguibilidad y la infalibilidad de las predicciones. Por otro lado, un modelo determinístico es más informativo, y por ello es más fácilmente falsable; basta que la secuencia observada difiera en un bit respecto a la predicha para concluir que el modelo no es el adecuado.

3.2.2 Un modelador

Las maneras de resolver la modelación son varias. Aquí sólo explicaremos una sencilla, porque nos contentamos con mostrar que la modelación es posible.

Sean $\mathrm{Syntax}(m, \mathbf{d}, \mathcal{D})$, con $0 \leq m < 2^{\mathbf{d}}$, todos los comportamientos del universo $\mathcal{U}$ que el aprendiz puede imaginar. Admitiendo que un modelo es mejor si predice mejor, entonces una manera de determinar la bondad de un modelo m, que es $\mathrm{Syntax}(m, \mathbf{d}, \mathcal{D})$, es utilizarlo para hacer una serie de predicciones y, una vez las predicciones se comprueben acertadas o fallidas, computar el porcentaje de aciertos sobre el total. Lo que interesa predecir es, por supuesto, la futura reacción del universo $\mathcal{U}$ sobre el aprendiz.

El modelador $\mathcal{M}$ podría, por lo tanto, funcionar así. Aplica, a cada modelo m que es candidato a realidad, la misma acción que el aprendiz está aplicando actualmente al universo $\mathcal{U}$, y anota la predicción del candidato. Cuando, en el instante siguiente, el aprendiz conoce la reacción recibida desde el universo $\mathcal{U}$, la compara con la predicción. Se repite el proceso durante $\mathbf{t}$ instantes. En cada instante han de predecirse $\mathbf{n}+\mathbf{v}$ valores de variables, por lo que el total de predicciones binarias hechas por el candidato sometido a la prueba es $\mathbf{t}.(\mathbf{n}+\mathbf{v})$. El candidato r con mayor porcentaje de aciertos de entre los modelos m comparados, es la realidad buscada.

Es importante que la prueba anterior, y con ella la modelación, puede hacerse simultáneamente sobre varios candidatos, es decir, en paralelo.

Con esta modelación, y ya que $\mathcal{R} = \mathrm{Syntax}(r, \mathbf{d}, \mathcal{D})$ siendo r el valor pasado desde el modelador $\mathcal{M}$ al simulador $\mathcal{S}$, la ecuación del aprendiz queda:

$$x?\ \odot^{\mathbf{m}} \oplus \mathrm{Syntax}(r, \mathbf{d}, \mathcal{D}) \oplus \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{n}}\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{v}} \otimes \mathrm{Syntax}(x, \mathbf{g}, \mathcal{E})\mathcal{M}^{\circ} \approx \mathrm{K1}\,.$$

3.2.3 Otros modeladores

El modelador visto sólo es uno de los muchos posibles. Otra manera juiciosa de elegir el mejor modelo r, de entre los $2^{\mathbf{d}}$ posibles, consiste en calcular la probabilidad de que cada uno de ellos genere, dado el stream de entrada aplicado al universo $\mathcal{U}$ durante un período de $\mathbf{t}$ instantes, el stream correspondiente observado como salida del universo $\mathcal{U}$. El mejor modelo es aquél que obtiene en el cálculo la probabilidad mayor.

Tampoco el promedio de aciertos es la única medida posible de la bondad de un modelo. Otra medida de la bondad de un modelo es la información, o negaentropía, que contiene.

3.3 La ejecución

La *ejecución* es la realización fiel de una representación lógica. Desde dentro de la lógica, la ejecución es la actualización del objeto formal. Llamaremos *ejecutor* $\mathcal{E}$ a la parte del aprendiz que hace la ejecución.

En el caso del aprendiz, la ejecución es la conversión de la solución lógica encontrada por el simulador $\mathcal{S}$, sea b, con $0 \leq b < 2^{\mathbf{g}}$, en interacción con el universo $\mathcal{U}$, en concreto $\text{Syntax}(b, \mathbf{g}, \mathcal{E})$. La ejecución será fiel si el ejecutor $\mathcal{E}$ utilizado por el simulador $\mathcal{S}$ en la resolución del problema del aprendizaje coincide con el ejecutor $\mathcal{E}$ del aprendiz.

3.4 Una clasificación

Puesto que los aprendices añaden una lógica interna a los adaptadores, la clasificación de los aprendices se hará en función de su lógica interna. También se distinguirán unos aprendices de otros según como lleven a cabo la modelación y la simulación.

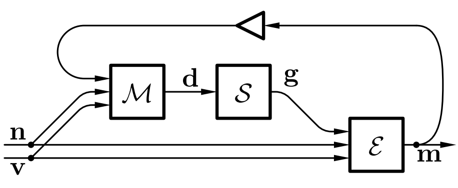
3.5 Definición

El aprendiz es un adaptador cuyo gobernador se divide en dos partes, un modelador y un simulador. Por ser el modelador $\mathcal{M}$ quien suministra la realidad $\mathcal{R}$ al simulador $\mathcal{S}$, la disposición del gobernador del aprendiz es: $\oplus\, \mathcal{M}\, \mathcal{S}$. Si la realidad es indistinguible del universo, $\mathcal{R} \approx \mathcal{U}$, condición que llamaremos *condición de modelación*, entonces el aprendiz puede resolver el problema de la supervivencia mejor que el adaptador porque, como ya explicamos, puede determinar la bondad de cada uno de sus posibles comportamientos sin tener que sufrir las consecuencias de ejecutarlos. Pero para ello es menester que el simulador $\mathcal{S}$ sea capaz de solucionar el problema del aprendiz, presupuesto al que denominamos *condición de aprendizaje*.

Un *aprendiz*, notado $\mathcal{A}_2$, es un autómata que tiene la forma:

$$\oplus\, \text{FORK}_{\mathbf{n+v}} \odot^{\mathbf{m}} \oplus \oplus \otimes \oplus\, \mathcal{M}\, \mathcal{S}\, \mathcal{I}_{\mathbf{n+v}}\, \mathcal{E}\, \text{FORK}_{\mathbf{m}},$$

cumpliendo $\mathcal{M}$ la condición de modelación, o sea, $\mathcal{R} \approx \mathcal{U}$; cumpliendo $\mathcal{S}$ la condición de aprendizaje; y siendo $\mathcal{E} \triangleright \mathcal{A}_0$.



Aprendiz
$\mathcal{A}_2$

3.6 Las enfermedades

Los aprendices pueden sufrir enfermedades como resultado de no cumplir la condición de modelación, $\mathcal{R} \approx \mathcal{U}$. Como el propio aprendiz no puede saber si cumple o no la condición de modelación, porque del universo $\mathcal{U}$ sólo es accesible su apariencia *actual*, no tiene manera de evitarlas. Nótese que, para determinar si dos autómatas son indistinguibles, es preciso verificar que todas las apariencias *potenciales* de ambos son idénticas (véase la sección §A.5.5 en el Anexo A).

La más grave de las enfermedades es la *enfermedad de* CAMUS.

Cuando el universo o entorno al que se enfrenta un aprendiz es muy adverso, porque produce muy pocas valoraciones buenas, entonces es probable que el comportamiento aplicado no obtenga valoración positiva alguna; siendo éste el comportamiento pésimo. Así las cosas, también será probable que el mejor modelo encontrado prediga que el aprendiz no será nunca recompensado, independientemente de lo que haga; siendo éste el modelo de máximo pesimismo. Que estas probabilidades sean más o menos altas depende de cómo sean concretamente el aprendiz y el universo. Por otra parte, supondremos que el aprendiz sólo cambia de comportamiento cuando el comportamiento simulado es mejor que el aplicado, porque ésta es una estrategia prudente al preferir el comportamiento comprobado cuando quedan igualadas una valoración comprobada con otra hipotética. Pues bien, en estas circunstancias, si el modelo de máximo pesimismo se convierte en la realidad del aprendiz, entonces todos los comportamientos candidatos que examina el simulador obtendrán una valoración nula y el comportamiento pésimo seguirá siendo aplicado, por lo que la realidad de máximo pesimismo obtendrá un ciento por ciento de aciertos y no será tampoco sustituida.

Un factor que incrementa la probabilidad de aplicar el comportamiento pésimo es que la modelación sea difícil. Si la modelación le resulta difícil al aprendiz, entonces cambiará de realidad con frecuencia. Como al cambiar de realidad cambian las valoraciones de los comportamientos candidatos del simulador, si el aprendiz cambia con frecuencia de realidad, entonces también cambiará de comportamiento con frecuencia. Cambiar de comportamiento con frecuencia en base a simulaciones efectuadas con modelos defectuosos facilita que el aprendiz llegue a aplicar un comportamiento pésimo.

Esto nos permite caracterizar las circunstancias que causan esta enfermedad. Dos factores parecen contribuir: la imposibilidad de modelar adecuadamente el mundo y la alta tasa de castigos recibida.

De modo que los síntomas de la enfermedad de Camus son los de una depresión apática, ya que el aprendiz queda bloqueado, sin intentar cambiar de comportamiento por creer que todo es inútil, cuando se enfrenta a entornos ininteligibles y altamente punitivos.

Es notable que, en este entorno, los adaptadores tienen menos dificultades. Un adaptador que recibe siempre castigos no se bloquea; al contrario, muchos de ellos, y el homeostato es un buen ejemplo, sólo cambian de comportamiento cuando reciben castigos.

La otra enfermedad es debida igualmente a una excesiva generalización, pero de signo opuesto, por lo que puede considerarse un efecto más que una enfermedad. Lo denominaremos *efecto de* Leibniz.

Si el aprendiz encuentra antes un comportamiento infalible, o sea, un comportamiento que sólo recibe premios y no recibe castigo alguno, que un modelo del universo infalible, es decir, un modelo que acierta todas sus predicciones y ninguna falla, entonces es probable que su mejor modelo acabe siendo uno que predice que obtendrá premios siempre e independientemente de lo que haga; siendo éste el modelo de máximo optimismo. Que la realidad del aprendiz sea la mejor de las posibles, aunque el universo no lo sea, no causa mayores trastornos al aprendiz, que seguirá aplicando felizmente el comportamiento infalible.

3.7 Conclusión

Son aprendices todos los autómatas de comportamiento variable que disponen de una lógica interna en la que hacen modelos del universo exterior y a la que trasladan el problema de la supervivencia.

4 La resolución

4.1 La teoría del problema

Para poder proseguir la resolución del problema aparente que desde un principio nos habíamos planteado, se hace necesaria una reflexión más detallada sobre la naturaleza del problema. En concreto, es necesario definir qué es un problema, es preciso distinguir la solución de la resolución del problema, y es obligado indagar sobre la particularidad que caracteriza al problema aparente. De tal estudio se beneficiarán, no sólo nuestras futuras investigaciones, sino también las hasta aquí realizadas, que adquirirán nuevos aspectos.

4.2 El problema

Un *problema* es una condición puesta a cierta libertad, o indefinición. Una *solución* al problema es un determinado uso de la libertad que satisface, o cumple, la condición. Si no hay libertad, entonces no hay problema. Es una *condición* aquello que sólo tiene dos posibles resultados, uno de los cuales se denomina satisfacción.

La *resolución* del problema es la manera de alcanzar la solución. Es decir, es el proceso que discurre desde el punto en el que se tiene el problema, con su condición y su libertad no ejercitada, hasta el momento en el que se tiene la solución, o sea, hasta el momento en el que se ejerce la libertad y se satisface la condición.

La solución de un problema, y consiguientemente la resolución, no es necesariamente única, aunque una solución, y por tanto una resolución, es suficiente.

4.3 La resolución

4.3.1 Las tres maneras

Hay tres maneras de resolver un problema: conocer una solución, usar el procedimiento de tanteo, o trasladar el problema.

Conocer una solución del problema soluciona el problema. Usar el procedimiento de tanteo puede solucionar el problema. Trasladar el problema inventa otro problema para cuya resolución hay tres maneras (*da capo*, o sea, véase la §4.3.1).

4.3.2 La solución

Para que la *solución* de un problema solucione el problema, es preciso conocer la solución, es necesario saber que soluciona ese problema y es imprescindible ejercitarla.

4.3.3 El tanteo

Cuando no se conoce la solución de un problema, pero se conoce un conjunto de posibles soluciones, se puede utilizar el procedimiento de tanteo, o procedimiento de prueba y error. El *tanteo* consiste en probar cada posible solución. Si no resultan erróneas todas las pruebas, entonces encontramos alguna solución al problema. De paso, posiblemente encontremos varias soluciones casi buenas.

Para que el procedimiento de resolución por tanteo solucione el problema, ha de suceder que en el conjunto de posibles soluciones se encuentre alguna solución, que la solución se reconozca como solución y, finalmente, que la solución se ejercite.

Un tanteador se compone de un conjunto de posibles soluciones y un gobernador. El gobernador determina qué posible solución probar, reconoce si es una solución o no y, si lo es, la ejercita. Si se imponen condiciones a la tarea del gobernador, entonces es un problema, al que denominamos el *problema de la búsqueda*. Hay tres maneras de resolver un problema (véase la §4.3.1).

4.3.4 La traslación

La *traslación* es la última de las maneras de resolver un problema, y consiste en convertirlo en otro problema. Llamamos problema convertido, o *cuestión*, al problema una vez que ha sido trasladado, y llamamos *problema original*, o simplemente problema si no da lugar a equívocos, al problema sin trasladar. A la solución del problema convertido la denominamos *respuesta*. Para que la conversión del problema sea efectiva, ha de disponerse también de la manera de desconvertir la respuesta a la cuestión, por si ésta fuere hallada. A la respuesta desconvertida, o sea, a la solución del problema original, la denominamos solución, o *solución original*.

El problema convertido puede tener una solución conocida, en cuyo caso la desconversión de la respuesta es la solución del problema original. El problema convertido puede no tener una solución conocida, pero puede ser conocido un conjunto de posibles soluciones, y en este caso puede ser aplicada una resolución por tanteo a la cuestión. El problema convertido puede ser trasladado.

La cuestión puede consistir en varios subproblemas. Un *subproblema* es un problema de los que resultan de la traslación de un problema, cuando resultan varios.

Para que sea posible la resolución por traslación de un problema, ha de contarse con una lógica que permita, como mínimo, cuatro representaciones, a saber, la del problema, la de la cuestión, la de la respuesta y la de la solución. En general interesan lógicas más ricas. Pero en este caso, y supuesto que existen condiciones que determinan que unas traslaciones son mejores y otras son peores, la determinación de cuál traslación aplicar al problema original es un problema al que denominaremos *problema de la traslación*. Y como ya sabemos, hay tres maneras de resolver un problema (véase la §4.3.1).

4.4 La implementación

La construcción práctica de un artefacto para solucionar un problema es una traslación de ese problema. La construcción impone condiciones prácticas que la teoría no tiene. Consecuentemente, siempre que exista cierta libertad de construcción, sucederá que esta traslación del dominio teórico al práctico, que denominamos *implementación*, planteará algún *problema práctico*. Cuando existe libertad para efectuar la implementación, la implementación no es única. Dicho de otra manera, los problemas prácticos no se siguen del problema teórico.

Si la implementación soluciona completamente tanto el problema teórico original como los problemas prácticos derivados de la implementación, de modo que el artefacto queda completamente definido, o sea, sin libertad alguna, entonces el artefacto es la solución y no ha de resolver ulteriores problemas. Si la implementación no soluciona completamente el problema original o los problemas prácticos, entonces el artefacto goza de cierta libertad a causa de la cual ha de resolver algún problema, por lo que lo denominaremos *resolutor*.

4.5 El problema aparente

En un *problema aparente*, o problema definido en apariencias, sólo están definidas las posibles maneras de actuar y los posibles resultados a obtener como reacción, sobre los que pesa una valoración. Una solución de un problema definido en apariencias es un modo de actuación que tiene como respuesta reacciones buenas, o sea, bien valoradas.

Lo característico del problema aparente es que no puede ser solucionado ahora, o *a priori*, porque en este caso todo lo que tenemos es la posibilidad de actuar y de observar. Lo interesante es que, en cambio, sí es posible resolverlo *a priori* estableciendo la estrategia de actuación a seguir al enfrentarse al problema.

De otro modo: si un problema es aparente, entonces no se puede implementar un artefacto que sea una solución del problema, y lo mejor que puede hacerse es dotar al artefacto de libertad y dejar que lo resuelva cuando al interaccionar se enfrente al problema, o sea, implementar un resolutor. De manera que lo que habíamos calificado hasta aquí como mejores soluciones del problema aparente son, bien mirado, mejores resolutores del problema aparente. Y podemos establecer las siguientes correspondencias: el mecanismo con la solución conocida, el adaptador con la resolución por tanteo y el aprendiz con la traslación del problema.

El adaptador implementa la resolución del problema de la supervivencia por el procedimiento de tanteo. El cuerpo $\mathcal{B}$ define el conjunto de soluciones posibles y el gobernador $\mathcal{G}$ determina el orden de búsqueda y reconoce la solución. Las características del problema de la supervivencia agravan el problema de la búsqueda. Las pruebas han de ser realizadas secuencialmente y, lo que es determinante, realizar alguna de las pruebas puede resultar mortal. También puede ser mortal no realizar, en un determinado intervalo de tiempo, alguna de las pruebas.

El aprendiz implementa la resolución del problema de la supervivencia por traslación. El modelador $\mathcal{M}$ soluciona el problema de la traslación, que habíamos llamado problema de la modelación, y traslada el problema, el simulador $\mathcal{S}$ resuelve el problema trasladado y el ejecutor $\mathcal{E}$ define el conjunto de soluciones posibles y desconvierte la solución encontrada por el simulador. Mas el aprendizaje no es una traslación cualquiera, sino aquélla que convierte un problema aparente, el problema de la supervivencia, en un problema que no es aparente, el problema del aprendiz. El problema del aprendiz no es aparente y esto, al hacer innecesaria la interacción para resolverlo, le confiere ventaja al aprendiz sobre el adaptador.

Pero el aprendizaje se basa en una hipótesis que denominamos esencialismo. El *esencialismo* postula que es solución de un problema aparente aquélla que lo es de cualquiera de los problemas que somos capaces de imaginar cuya apariencia es la del problema aparente. Esto permite la sustitución del problema aparente por otro que no es aparente, pero cuya apariencia es la del primero. Aunque la posición esencialista sea la mejor que puede adoptarse ante un problema aparente, no es legítima. Por la propia naturaleza del problema aparente, es imposible conocer la apariencia no experimentada y, por lo tanto, aunque cierto problema que no es aparente se haya mostrado hasta el momento indistinguible del problema aparente, no hay modo de asegurar que esto seguirá siendo cierto. De otra manera: no es posible eliminar completamente la apariencia de un problema aparente; en el caso del aprendiz, aunque el problema del aprendiz no es aparente, el problema de la modelación sí es aparente (véase la §3.6), ya que para resolverlo es necesaria la interacción.

Nótese que cualquier formalización del problema aparente peca de esencialista; a no ser que se recurra a la astucia de declarar autoritariamente que tal formalización es lógica, y se defina la lógica como la totalidad entera de lo posible.

4.6 Una notación resolutiva

Hay tres maneras de resolver un problema. Pero la traslación inventa otros problemas que han de ser solucionados para que quede solucionado el problema original. Además, determinar qué traslación hacer, cuando varias son posibles, es otro problema que aparece al intentar resolver por traslación el problema original. Y el tanteo, si hay requisitos de orden, plantea el problema de la búsqueda, o sea, de determinar qué probar.

Esto hace que la resolución de un problema vaya generando otros problemas cuya solución es requisito para la solución del problema original. De otra manera: la resolución de un problema puede hacer uso repetidamente de la traslación y del tanteo. Introduciremos una notación para explicar el camino seguido al resolver el problema, que por tener su raíz en el problema original, y la posibilidad de irse desdoblando en varias ramas cada vez que se traslada, denominaremos *árbol de resolución*.

Notamos un problema dado como $\wp?$, una solución conocida como $\dagger$, la resolución por tanteo como $\Im$ y la traslación de un problema como $\aleph$. Si el tanteo genera un problema de búsqueda, anotamos $\Im(\wp^s?)$. Si el problema trasladado genera un problema de traslación lo anotamos $\aleph(\wp^m?)$, si de la traslación resultan n subproblemas lo notamos $\aleph^n$, y si ambas cosas ocurren entonces la notación es: $\aleph^n(\wp^m?)$.

Para notar el árbol de resolución de un problema, comenzamos por el problema, su raíz, y vamos escribiendo, de izquierda a derecha, el camino seguido hasta alcanzar la solución. Por ejemplo,

$$\wp? \;\rightarrow\; \aleph^2 \begin{cases} \wp? \;\rightarrow\; \Im \\ \wp? \;\rightarrow\; \dagger \end{cases}$$

significa que, para resolver un problema, ha sido primero trasladado, que como resultado de la traslación se obtuvieron dos subproblemas, uno al que se aplicó el procedimiento de tanteo con éxito, y otro del que se conocía la solución.

Con esta notación, si el problema $\wp^a?$ es el problema aparente, entonces las resoluciones que ejecutan los resolutores encontrados son:

$$\begin{aligned} \text{Mecanismo } \mathcal{A}_0\text{:} &\quad \wp^a? \;\rightarrow\; \dagger \\ \text{Adaptador } \mathcal{A}_1\text{:} &\quad \wp^a? \;\rightarrow\; \Im(\wp^s? \;\rightarrow\; \dagger) \\ \text{Aprendiz } \mathcal{A}_2\text{:} &\quad \wp^a? \;\rightarrow\; \Im\big(\wp^s? \;\rightarrow\; \aleph(\wp^m? \;\rightarrow\; \dagger)\,\{\,\wp^\ell? \;\rightarrow\; \dagger\,\}\big). \end{aligned}$$

La notación es muy grosera, solamente recoge los rasgos principales de la resolución de un problema (véase la §7.4.1).

4.7 La evolución resolutiva

El problema de la supervivencia no tiene una solución definitiva, pero hay resolutores mejores y resolutores peores. En una *evolución* de resoluciones del problema de la supervivencia, cada resolución debe ser mejor que la anterior, aunque ello sea a costa de que se cumpla alguna condición. La evolución resolutiva es una manera de solucionar el problema de la supervivencia, paso a paso, y cada vez en mayor grado. Por ejemplo, el mecanismo $\mathcal{A}_0$, el adaptador $\mathcal{A}_1$ y el aprendiz $\mathcal{A}_2$, siendo $\mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_0$, constituyen tres pasos de una evolución resolutiva que puede tener lugar si se cumple la condición de adaptación, la condición de modelación y la condición de aprendizaje.

Definimos la lógica externa como aquélla en que representamos el problema de la supervivencia y sus soluciones que, por ser un problema aparente, no son soluciones definitivas sino, más bien, resolutores. De este modo resulta que los resolutores que hemos encontrado hasta el momento, el mecanismo $\mathcal{A}_0$, el adaptador $\mathcal{A}_1$ y el aprendiz $\mathcal{A}_2$, son objetos distintos de la lógica externa. Pero con el aprendiz apareció otra lógica, la lógica interna, de tal modo que si en esta lógica pudieran representarse problemas, soluciones y resoluciones, entonces podría continuarse la evolución resolutiva dentro de la lógica interna.

La parte de la evolución resolutiva que ocurre dentro de la lógica interna es invisible en la lógica externa, porque sus distintos pasos se corresponden a un único objeto de la lógica externa, al que denominaremos conocedor. Denominaremos *evolución física* a aquella parte de la evolución resolutiva que es visible en la lógica externa, o sea, aquélla cuyos pasos corresponden a distintos objetos de la lógica externa en la que se define el problema, y llamaremos *evolución cognitiva* a aquella parte de la evolución que es invisible en la lógica externa, o sea, aquélla cuyos pasos corresponden a un mismo objeto de la lógica externa.

4.8 Conclusión

Sabemos ahora que el problema de la supervivencia, como cualquier otro problema, admite una resolución cuyas tres formas básicas son la solución conocida, el tanteo y la traslación, que pueden combinarse en árboles de resolución más complejos. Tenemos, además, los datos necesarios para proseguir la evolución resolutiva proponiendo un aprendiz mejorado, al que nos referiremos como conocedor. Ya podemos adelantar que, así como el mecanismo, el adaptador y el aprendiz sólo eran capaces de una manera de resolver, el conocedor será capaz de más maneras. Pero antes de llegar al conocedor, averiguaremos qué tipo de lógica es capaz de representar problemas, soluciones y resoluciones.

5 El simbolismo

5.1 La lógica simbólica

La tarea es caracterizar las lógicas capaces de representar problemas, soluciones y resoluciones, tanto las básicas, solución conocida, tanteo y traslación, como sus combinaciones en árboles de resolución. Nótese que un conocedor con esta lógica interna sería capaz de resolver de cualquiera de las maneras y, por lo tanto, sería capaz de una evolución cognitiva.

Como ya hemos hecho varias veces para llegar hasta aquí, presentaremos un tipo de lógica que cubre los requisitos, aunque ello signifique que pudiéramos olvidarnos de otras lógicas; en este caso tal vez no existan otras. Es decir, veremos que las lógicas simbólicas permiten representar problemas, soluciones y resoluciones.

Con el propósito de dar una estructura a la explicación, presentaremos primero las lógicas analíticas y después, y sobre la base de aquéllas, las lógicas simbólicas. Ésta es sólo una argucia expositiva, ya que una lógica analítica es insuficiente para representar problemas, aunque una lógica simbólica es necesariamente analítica.

Por último, y puesto que el interés final es que una lógica simbólica sea la lógica interna de un resolutor del problema aparente, o sea, de un objeto de la lógica externa, todas estas capacidades que ahora exigimos a la lógica interna deben estar desde un principio en la lógica externa. Resulta, de nuevo, que la lógica elegida para circunscribir el problema aparente, siendo ajena a éste, repercute decisivamente en el estudio del problema aparente. Así que mostraremos que es posible construir una lógica simbólica sobre un objeto del álgebra automática, esto es, sobre un autómata finito.

A partir de aquí diremos lógica simbólica, en singular, y pensaremos, sobre todo, en el cálculo λ, aunque se trata más de un tipo de lógicas que de una lógica concreta.

5.2 El análisis

5.2.1 El todo y sus partes

Llamamos *lógica exhaustiva* a aquélla que define sus representaciones por la anotación exhaustiva de todas las posibilidades. Las lógicas exhaustivas sufren de crecimiento exponencial. Una buena lógica ha de tener otros recursos expresivos que le permitan evitar los crecimientos exponenciales.

Por ejemplo, la longitud de las formas de escribir autómatas en el álgebra automática crece exponencialmente con el número de variables de estado. Así, el número de bits de la matriz $[\mathcal{A}^*_{pu}]$ correspondiente a un autómata $\mathcal{A}$, véase la §A.4.13, es $(\mathbf{S}+\mathbf{O}).2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{P}}$, de modo que si lo que nos interesa es el crecimiento de dicho número en relación al número de variables de estado, podemos establecer que crece con la potencia de dos del número de variables de estado, $O(2^{\mathbf{S}})$. El tamaño en bits de la matriz $(\mathcal{A}_{pq})$ del autómata $\mathcal{A}$, véase la §A.4.1, también crece exponencialmente con el número de variables de estado, concretamente como $O(2^{2\mathbf{S}})$.

Un recurso útil contra el crecimiento exponencial es *partir* el todo. El *todo* queda entonces descrito como la *composición* de sus varias *partes*.

Por ejemplo, en el álgebra automática se cumple: $\mathbf{S}_{\oplus\mathcal{BC}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + \mathbf{S}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{S}_{\otimes\mathcal{BC}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + \mathbf{S}_{\mathcal{C}}$, $\mathbf{S}_{\odot\mathcal{B}} = \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + 1$. Esto quiere decir que, una vez definidas las partes $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ en el léxico, la longitud de las composiciones que se pueden hacer con las partes crece linealmente con el número de variables de estado, o sea, como $O(\mathbf{S})$.

Así, por ejemplo y en concreto, tomaremos como base el autómata:

$$\mathrm{DEL} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle 1,1,1,0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

cuya matriz $(\mathcal{A}_{pq})$ ocupa, como podemos ver, 16 bits, y escribiremos de varias maneras el autómata

$$\mathrm{DEL}^{1024} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \oplus^{1024}\,\mathrm{DEL}\,.$$

La expresión anterior es sumamente compacta pero, aun sin usar la abreviatura que permite condensar la escritura de una reiteración de composiciones en serie, podríamos escribir

$$\mathrm{DEL}^{1024} = \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{1023} \underbrace{\mathrm{DEL} \ldots \mathrm{DEL}}_{1024},$$

que usa 2047 símbolos. Estos símbolos no son bits, pero si el autómata DEL formase parte de un léxico de $2^8 - 3$, o menos, autómatas, asignando un código a cada uno de éstos y un código a cada una de las tres composiciones, podríamos utilizar una codificación a 8 bits por símbolo, por lo que la longitud de la expresión sería menor que

2^{14} bits. Con léxicos mayores crecería algo esta longitud, pero nada en comparación al tamaño que tendría la matriz $[\mathcal{A}^*_{pu}]$ de DEL^{1024}, exactamente $1025.2^{1025} > 2^{1035}$ bits, que es una cantidad difícil de imaginar, aunque mucho menor que 2^{2050} que es el tamaño en bits de la matriz $(\mathcal{A}_{pq})$ de DEL^{1024}.

Este ejercicio muestra la utilidad de hacer partes para evitar el crecimiento desmesurado de la complejidad.

5.2.2 La partición

Si las partes del todo son de la misma naturaleza que el todo, entonces la composición de cada una de las partes del todo puede hacerse de la misma manera que la composición del todo en sus partes. Esto permite la composición reiterada del todo en sus partes, de una parte del todo en sus partes, de una parte de las partes del todo en sus partes, y así hasta donde sea de interés. Y esto utilizando un único método de composición. Llamamos *partición* a esta composición reiterada. Si, por el contrario, la parte es de diferente naturaleza que el todo, entonces necesita un método de composición diferente. Esto complica la composición reiterada.

A una lógica, o modo de representación, que permite la partición la denominamos *lógica particular*. El álgebra automática es una lógica particular.

5.2.3 La lógica analítica

En una lógica particular llamamos *léxico* al catálogo de partes susceptibles de ser compuestas en la definición de un todo. Decimos que un determinado léxico permite el *análisis* de una determinada representación si la representación es equivalente a alguna composición de las partes incluidas en el léxico. Si un léxico hace que cualquier representación de la lógica particular pueda ser analizada, entonces decimos que esa lógica con ese léxico constituye una *lógica analítica*, y al léxico lo denominamos *base*. Disponer de una lógica analítica asegura que cualquier representación puede ser partida. La analiticidad, así definida, es una propiedad de la lógica, siendo independiente del uso que se hace de la lógica.

Por ejemplo, sabemos que los autómatas del conjunto

$$\mathrm{Minimum} = \{\,\mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NAND}\,\}$$

son una base del álgebra automática (véase la §A.4.11). Esto significa que el álgebra automática con el léxico Minimum constituye una lógica analítica.

5.2.4 El nombre

Un *nombre* es una etiqueta o manera de referirnos a una cosa. Para notar la asignación de un nombre a una cosa utilizaremos el signo $\stackrel{\text{def}}{=}$. Así, anotando

$$\text{NAND} \stackrel{\text{def}}{=} \langle 2, 1, 0, 0; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

podemos utilizar el nombre NAND para referirnos abreviadamente al autómata que figura a la derecha de $\stackrel{\text{def}}{=}$. Habitualmente relajaremos el discurso y diremos que NAND es un autómata, sin aclarar que, en rigor, NAND sólo es el nombre del autómata.

La partición, o composición reiterada, de las lógicas analíticas permite hacer definiciones a partir de otras definiciones. Esto hace especialmente útil la utilización de los nombres y hace natural el uso de expresiones. De momento, definimos la expresión como una composición en la que pueden utilizarse nombres.

Así, en el álgebra automática, podemos definir un autómata como la composición $\oplus\,\text{FORK}\,\text{NAND}$ de elementos del léxico Minimum. Pero además, y merced a la posibilidad que tienen las lógicas analíticas, por ser particulares, de hacer particiones, podemos componer estas composiciones y aún serán de la misma naturaleza que los elementos del léxico de partida. Es decir, que siguiendo con el ejemplo del álgebra automática, la expresión lícita

$$\oplus \oplus \text{FORK}\,\text{NAND} \oplus \text{FORK}\,\text{NAND}$$

también es un autómata. Cuando una determinada expresión, como $\oplus\,\text{FORK}\,\text{NAND}$, se muestra útil en la definición de expresiones mayores, es interesante, porque abrevia, darle un nombre a esa expresión. En este caso, si le damos el nombre NOT a la expresión corta, lo anotaremos como

$$\text{NOT} \stackrel{\text{def}}{=} \oplus\,\text{FORK}\,\text{NAND},$$

y la expresión larga queda abreviada a $\oplus\,\text{NOT}\,\text{NOT}$. También la expresión larga y la abreviada pueden ser nombradas, y en este caso, si somos lo sufientemente perspicaces, podemos darles el mismo nombre ya que, en definitiva, ambas expresiones designan al mismo autómata, de modo que anotaremos

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \oplus \text{NOT}\,\text{NOT} = \oplus\oplus \text{FORK}\,\text{NAND} \oplus \text{FORK}\,\text{NAND}\,.$$

Queda claro que el sistema de nombres puede crecer hasta alcanzar tamaños en los cuales resulta difícil percatarse de que dos expresiones designan la misma cosa, pero cuando sí nos percatamos, el signo $=$ denota que una expresión puede alcanzarse desde la otra haciendo las debidas sustituciones de los nombres por las expresiones que designan.

5.3 La semántica y la sintaxis

Finalizada la revisión de la lógica analítica, nos centraremos en la lógica simbólica. Los conceptos que debe representar una lógica simbólica son: el problema, la solución y la resolución. En la representación de resoluciones hay dos aspectos, la representación de las maneras básicas de resolver un problema y la representación del árbol de resolución. Pero antes de estudiar cómo puede expresarse cada uno de estos conceptos en una lógica simbólica, es mejor definirla.

Llamamos *lógica simbólica* o *simbolismo* a una lógica que trabaja a dos niveles distintos, uno semántico y otro sintáctico. La *sintaxis* es el dominio de las expresiones. Una *expresión* ha de ser traducida a la semántica para que tenga significado. La *semántica* es el núcleo de la lógica simbólica o simbolismo y ha de ser, en sí misma, una lógica completa.

Por ejemplo, en el caso de los nombres de las lógicas analíticas, la traducción es la mera sustitución del nombre por el objeto semántico que designa. Un simbolismo, pues, generaliza el uso de los nombres y facilita la definición de nuevos tipos de objetos sobre la base de los objetos fundamentales o semánticos. Por ejemplo, un conjunto pasa a ser cierto tipo de expresión que se traduce en varios objetos semánticos.

5.4 El problema

Puesto que un problema es una representación con cierta libertad y cierta condición, la lógica simbólica ha de ser capaz de expresar la libertad y la condición.

5.4.1 La libertad

En una lógica analítica, la *libertad* puede representarse dejando sin definir algunas partes. Denominamos *función* a la expresión abierta, o sea, a aquella expresión que incluye nombres que no se refieren a objeto semántico alguno. A un nombre que no se refiere a objeto semántico alguno se le denomina *variable libre*, y si forma parte de una expresión abierta condicional, o sea, si forma parte de un problema, entonces se le denomina *incógnita*.

Por ejemplo, la expresión aritmética $\lambda_x 2x$ representa la función 'doble de', donde x es la variable libre.

Las expresiones abiertas también pueden recibir un nombre. Así, siguiendo con el ejemplo, $f \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_x 2x$ denota que hemos asignado el nombre f a la función 'doble de'. Esto también se nota $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2x$.

Ni la expresión abierta ni su nombre se corresponden con objeto semántico alguno, ya que algunas de sus partes (las designadas por las variables libres) están indefinidas. La función completamente asignada, o sea, una vez que se asigna un objeto semántico a cada una de las variables libres de la función, sí se corresponderá con algún objeto semántico.

5.4.2 La condición

Una condición sólo tiene dos posibles resultados, uno de los cuales se denomina satisfacción. El cumplimiento o no de una determinada relación entre dos objetos es, por ejemplo, una condición. Así, en el álgebra automática la indistinguibilidad de dos autómatas puede usarse como condición. Lo mismo puede decirse de la igualdad de autómatas.

La combinación de condiciones se hace según las prescripciones del álgebra de Boole. En general, se usan tres operaciones: conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$), aunque la negación conjunta ($\downarrow$) sola, o la negación alternativa ($|$) sola, serían suficientes.

5.4.3 El problema

Ya podemos representar problemas. Así $x?\ 2x = 8$, o simplemente $2x = 8$, denota el problema aritmético consistente en hallar un número cuyo doble sea ocho. Como sabemos, la resolución de este problema puede hacerse mediante una traslación consistente en dividir ambos miembros de la ecuación entre dos,

$$(x?\ 2x = 8) \Longrightarrow (x?\ x = 4),$$

ya que el problema resultante, $x = 4$, es de solución conocida, a saber, cuatro. En este ejemplo, se puede decir que la expresión condicionada $2x = 8$, o el problema así notado, es una forma perifrástica de referirse a sus soluciones, en este caso al número cuatro.

5.5 La solución

La solución, en una lógica, es el objeto formal perfectamente definido que cumple las condiciones propuestas por el problema. Cualquier lógica debe ser capaz de definir perfectamente sus objetos porque una lógica incapaz de tratar sus objetos bien definidos parece un contrasentido. Que el razonamiento anterior sea circular, sólo demuestra que el concepto de solución es consustancial al de lógica.

Soluciones ya las representaban el adaptador y el aprendiz, y hasta el mecanismo era una solución.

Así como las expresiones abiertas no correspondían a objeto semántico alguno, las soluciones sí han de corresponder a algún objeto semántico, pues de lo contrario el simbolismo sería inútil. Pero como no todos los problemas tienen solución, ocurre que hay expresiones abiertas condicionadas que no describen objeto semántico alguno, siendo éste uno de los orígenes de las paradojas.

5.6 El tanteo

En el tanteo lo importante es definir el conjunto de posibles soluciones, por lo que es necesario que la lógica simbólica represente *conjunto*s, o listas de soluciones.

El cuerpo de un adaptador representa un conjunto de posibles soluciones y, como hemos visto en el álgebra automática merced al concepto de ampliación, un conjunto de autómatas puede seguir siendo un autómata. Luego, en este caso, las dos clases de cosas son una misma cosa.

Pero ahora, disponiendo de un simbolismo, podemos permitirnos una notación más general de los conjuntos. En concreto, la expresión

$$\{\,\mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NAND}\,\}$$

representa al conjunto formado por los cuatro autómatas cuyos nombres aparecen en la expresión. Nótese que un simbolismo de esta guisa permite definir conjuntos de autómatas de modo más general que $\mathrm{Syntax}(x, \mathbf{n}, \mathcal{A})$, ya que con éste último todos los autómatas del conjunto deben tener el mismo número de variables.

Cuando un problema tiene varias soluciones, entonces puede utilizarse el problema para referirse en perífrasis al conjunto de sus soluciones. Esta forma de definir conjuntos por las propiedades que caracterizan a sus elementos, se denomina *abstracción.*

La abstracción permite definir recursivamente conjuntos infinitos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales puede expresarse así:

$$\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{x?\ (x = 0) \vee (\exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1)\}.$$

Los conjuntos infinitos plantean algunas dificultades, ya que si bien cada uno de sus elementos puede referirse a un objeto semántico, el conjunto completo no puede, en ningún caso, tener una correspondencia semántica.

5.7 La traslación

La traslación de problemas supone, en una lógica simbólica, la transformación de expresiones abiertas y condicionadas. Puesto que un problema no se corresponde con objeto semántico alguno, la traslación de problemas tampoco puede corresponderse con objeto semántico alguno.

Al aplicar una determinada transformación a una expresión ξ_1 resultará otra expresión ξ'_1, proceso que puede representarse como un par ordenado de expresiones, (ξ_1, ξ'_1). La misma transformación aplicada a otra expresión ξ_2 resultará en otra expresión ξ'_2, por lo que este otro proceso se representará con un par ordenado diferente, (ξ_2, ξ'_2). Nos interesa representar, no sólo la aplicación de una transformación a una determinada expresión, sino la transformación misma. Llamamos *algoritmo* a la representación de una transformación sintáctica de expresiones.

A la hora de representar transformaciones sintácticas de expresiones nos caben dos posibilidades: o bien representamos las transformaciones sintácticas en otra lógica que denominaremos metasintaxis, o bien representamos las transformaciones sintácticas en la misma *sintaxis* que entonces calificamos de *recursiva*. Como ocurría con las particiones (véase la §5.2.2), el primero de los caminos complica la traslación reiterada, y nótese que el problema trasladado puede resolverse por traslación, por lo que el segundo es preferible. Es decir, de ahora en adelante sólo consideraremos el caso en el que los algoritmos son expresiones sintácticas y no metasintácticas. El calificativo de recursiva se explica porque, en su caso, una transformación puede aplicarse, también, a la expresión que se refiere a esa misma transformación.

Nos interesa disponer de un *evaluador* de expresiones que convierta un algoritmo en la transformación de expresiones que representa. Nótese que un evaluador Θ tomará un algoritmo $\xi_\aleph$, que es la expresión que representa una determinada transformación $\aleph$ de expresiones, y una expresión ξ, y devolverá aquella expresión ξ' que resultaría de aplicar la transformación $\aleph$ a la expresión ξ.

$$\Theta(\xi_\aleph, \xi) = \aleph(\xi) = \xi'.$$

Ya vimos al comienzo de esta sección que los simbolismos que nos interesan deben ser capaces de representar pares ordenados de expresiones como expresiones, por lo que resulta que lo que hace el evaluador Θ es, simplemente, una transformación de expresiones. De modo que en toda sintaxis recursiva existe un *algoritmo universal* capaz de cualquier transformación; lo notaremos ξ_Θ porque es la expresión que representa a la transformación efectuada por el evaluador.

En resumen, la necesidad de poder realizar transformaciones reiteradamente con un único aparato lógico fuerza a la utilización de simbolismos recursivos con algoritmos universales.

5.7.1 Una digresión paradójica

Llamamos *paradoja* a cierta expresión que no teniendo referente semántico, se confunde con otras que sí lo tienen.

Tratando de la representación simbólica de la resolución por solución conocida encontramos un tipo de paradoja, la *paradoja de la solución*, que ocurre cuando nos referimos perifrásticamente a la solución de un problema sin solución. Un ejemplo de este tipo es "el cuadrado redondo". Cualquier lógica capaz de representar problemas puede sufrir paradojas de la solución.

Al tratar de la representación simbólica de la resolución por tanteo encontramos otro tipo de paradoja, la *paradoja del tanteo*, que ocurre cuando nos referimos al conjunto de todas las soluciones, y tal conjunto no termina nunca de construirse. Valen, como ejemplos de este tipo, todos los conjuntos infinitos.

Con la traslación aparecen las paradojas más engañosas. En los simbolismos recursivos pueden construirse expresiones cuya interpretación semántica resulta imposible, porque se enreda en una secuencia inacabable de transformaciones. Llamaremos *paradoja de la traslación* a una paradoja de este tipo. La característica de las paradojas simples de este tipo es que hacen referencia a su propia interpretación, de la que es ejemplo prototípico la sentencia "esta frase es falsa".

Las paradojas más peligrosas, las del tanteo y de la traslación, ya que las paradojas de la solución son más fáciles de eliminar, tienen una relación con el infinito. Una manera de evitar estas paradojas es incluir una *condición de parada* que sea seguro que terminará por cumplirse. Aunque sea de poco consuelo, la muerte despeja cualquier paradoja pendiente.

Ejemplos: la paradoja del cretense EPIMÉNIDES, “todos los cretenses son unos mentirosos”; la función Lisp, en dialecto Scheme[44], `(define (paradox) (not (paradox)))`; el conjunto paradójico de RUSSELL, $R = \{x?\ x \notin x\}$. Hasta las paradojas de ZENÓN sobre el movimiento se basan en razonamientos que no llegan a concluir.

Como muestra, por ejemplo, la paradoja `(define (paradox) (not (paradox)))`, la condición para que una lógica pueda sufrir paradojas de la traslación coincide con la condición para que una lógica se denomine recursiva, a saber, que los algoritmos sean expresiones sintácticas. De este modo se puede definir un algoritmo como una expresión sintáctica en la que aparecen otros algoritmos, y si alguno de estos algoritmos hace referencias recursivas sin que se disponga de una condición de parada que detenga el proceso, entonces resultará que la traslación descrita por el algoritmo no podrá abandonar nunca la sintaxis.

5.7.2 Una digresión formal

La formalización de las matemáticas puede verse en los siguientes términos de la teoría aquí presentada. La semántica son las matemáticas mismas. Las expresiones que formalizan las matemáticas son interpretadas como verdaderas o como falsas. Sólo interesan las transformaciones que conservan la verdad, o sea, aquéllas que transforman una expresión verdadera en otra expresión verdadera; a estas transformaciones se les denomina reglas de inferencia. El objetivo de la formalización es proporcionar un número finito de reglas de inferencia y un número finito de expresiones verdaderas por definición, los axiomas, que sea capaz de generar, por aplicación reiterada de las reglas de inferencia, todas aquellas expresiones cuya interpretación sea verdadera y ninguna cuya interpretación sea falsa.

El punto crucial para que un formalismo así definido pueda sufrir paradojas de la traslación, es que las reglas de inferencia también puedan ser expresadas sintácticamente. Si las reglas de inferencia se pueden formalizar en el propio formalismo, entonces estamos en el caso de los simbolismos recursivos, y el formalismo puede sufrir paradojas.

---

[44] Abelson, H.; Sussman, G.J.; Sussman, J. (1985): *Structure and Interpretation of Computer Programs.*

GÖDEL[45] mostró que el formalismo necesario para formalizar la aritmética tiene una expresividad que es suficiente para formalizar su propio aparato de inferir. Como consecuencia tal *formalismo* es propenso a las paradojas. En concreto la expresión cuya traducción al castellano es “esta expresión no es inferible” es una paradoja que puede ser expresada en el formalismo de la aritmética. Suele afirmarse que la paradoja de GÖDEL es verdadera porque, efectivamente, no puede ser inferida en el formalismo que describe la aritmética. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que tal verdad no es una verdad que interese a la aritmética, sino a la formalización de la aritmética.

5.7.3 Una digresión final

Para la teoría del problema, una paradoja de la traslación equivale a una resolución infinitamente larga y, por consiguiente, infinitamente mala. Como quiera que también las resoluciones muy malas, y aun las malas, deben ser evitadas, resulta que la condición de parada que debe evitar las resoluciones muy largas también evitará las infinitamente largas. Además, los algoritmos sintácticos son de una extraordinaria potencia, y los simbolismos recursivos que los soportan son relativamente económicos, de manera que las paradojas que sufren son fácilmente toleradas.

5.8 El árbol

Un árbol tiene nodos y ramas. Todo árbol tiene un nodo y sólo uno, llamado raíz, que no es rama de ningún otro nodo. Cada nodo tiene un determinado número de ramas; si tiene cero ramas el nodo se denomina hoja. Cada rama es un árbol.

El árbol es una expresión recursiva, y por lo tanto los algoritmos más indicados para su tratamiento son los algoritmos recursivos. Ya sabemos que los algoritmos recursivos son necesarios en nuestro simbolismo, y como en esos simbolismos los algoritmos son ya expresiones sintácticas, resulta que la necesidad de admitir expresiones recursivas para representar los árboles de resolución no supone requisito adicional alguno.

[45] Gödel, K. (1931): *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme, I.*

5.9 El dominio de la sintaxis

Una vez vistos todos los conceptos que debe ser capaz de representar la lógica interna del conocedor, estamos en disposición de determinar cuál será el dominio de la semántica y cuál el dominio de la sintaxis de nuestro simbolismo.

La solución ha de ser un objeto semántico y el problema ha de ser un objeto sintáctico. El tanteo podría ser semántico, aunque sintácticamente se obtiene una mayor flexibilidad y la abstracción, potente herramienta para definir conjuntos, sólo es posible sintácticamente. La traslación, y sobre todo la traslación reiterada, es un concepto sintáctico y recursivo. Los árboles son también expresiones recursivas, y por lo tanto sintácticas. Así que toda la resolución es un proceso sintáctico, aunque toda solución, o posible solución, encontrada haya de ser interpretada semánticamente.

En resumen, sólo la solución se queda en la semántica, siendo tanto el problema como su resolución conceptos sintácticos.

5.10 El motor sintáctico

En los simbolismos interesantes la sintaxis es enormemente versátil, puede llegar a ocupar la mayor parte de los recursos de computación de todo el simbolismo y puede alcanzar una notable autonomía. Tanta es la autonomía de las sintaxis, que se pueden construir artefactos que la implementen. De hecho la posibilidad de separar la sintaxis de la semántica hace posible el lenguaje. Por ejemplo, un libro recoge la sintaxis correspondiente a ciertos significados. Incluso se puede construir un artefacto que implemente una sintaxis recursiva, como la computadora.

No obstante la sintaxis, en sí misma, carece de significado. Por esto un libro escrito en un idioma, o lenguaje, desconocido no comunica y no se puede decir que una calculadora sepa sumar, aunque sea cierto que si apretamos la tecla a la que damos el significado ‘dos’ (‘2’), después la tecla a la que damos el significado de ‘suma’ (‘+’), otra vez la tecla correspondiente al ‘dos’ (‘2’) y finalmente la tecla que interpretamos como ‘evaluación’ (‘=’), resulte que en la pantalla se enciendan una serie de puntos luminosos que interpretamos como ‘cuatro’ (‘4’).

Llamamos *motor*, o motor sintáctico, al artefacto que implementa una sintaxis recursiva. Una computadora es un motor sintáctico.

McCulloch y Pitts[46] mostraron que es posible construir un motor sintáctico con neuronas.

5.11 La simbolización

El álgebra automática es una lógica simbólica, y por eso podemos utilizarla para plantear el problema aparente. En este caso, los objetos semánticos de la lógica externa son los autómatas finitos, ya que las soluciones han de ser autómatas finitos. Si pretendemos que el conocedor simbólico sea una solución del problema de la supervivencia, entonces ha de ser tanto un objeto semántico como un motor sintáctico. Nos falta, por lo tanto, averiguar si un autómata finito puede ser un motor sintáctico.

Afortunadamente, esta cuestión ya ha sido contestada afirmativamente de varios modos, por lo que sólo citaremos algunos ejemplos significativos. Fue Turing[47] el primero en explicar cómo construir un simbolismo, y lo hizo, precisamente, sobre autómatas finitos en su investigación sobre los números computables. Fue el mismo Turing quien mostró la equivalencia entre su simbolismo y el cálculo λ de Church[48]. Las computadoras son otra prueba evidente de que es posible construir simbolismos sobre autómatas síncronos, finitos, binarios y determinísticos.

El primer simbolismo recursivo descubierto, por Gödel, fue la aritmética formalizada, pero al estar este simbolismo construido sobre una semántica que es inaccesible, la aritmética, resulta que fue Turing el primero en explicar cómo construir un simbolismo.

5.12 Conclusión

La lógica simbólica, con su sintaxis y su semántica, puede representar problemas, soluciones y resoluciones. Con la lógica simbólica aparecen los dos tipos de problemas: los problemas aparentes o semánticos, y los problemas simbólicos o sintácticos. Cuando el problema sintáctico pierde toda relación con el problema semántico, aparecen las paradojas.

---

[46] McCulloch, W.S.; Pitts, W.H. (1943): *A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity.*

[47] Turing, A.M. (1937): *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem.*

[48] Church, A. (1936): *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory.*

6 El conocedor

6.1 Replanteamiento

El estudio de la resolución, §4, nos proporciona información suficiente para proseguir la evolución resolutiva del problema aparente que nos había llevado hasta el aprendiz. Sabemos que el aprendiz acomete un determinado modo de resolución, el adaptador otro diferente, y el mecanismo un tercero (véase la §4.6). Y sabemos que hay muchas otras maneras de resolver, por lo que el conocedor será más versátil que los aprendices, los adaptadores y los mecanismos, si es capaz de los modos de resolución de éstos y, además, de otros. También sabemos, §5, que si la lógica interna del conocedor es simbólica, entonces este *conocedor simbólico* es capaz, en principio, de cualquier modo de resolución.

6.2 Las dos partes

Siendo el *conocedor* un autómata capaz de varias resoluciones, cabe estructurarlo en dos partes: aquélla, a la que llamaremos *ánima*, que determina cuál de las posibles resoluciones ejecutar y aquélla otra, a la que denominaremos *mente*, que resuelve, es decir, que busca la solución a la manera determinada por el ánima.

Lo que el adaptador era con respecto a las soluciones, lo es el conocedor con respecto a las resoluciones.

6.2.1 El ánima

La tarea del ánima es determinar qué posible resolución ejecutar de las varias que la mente hace posibles. Como esta tarea es un problema, la denominaremos el *problema de la resolución*. Podemos clasificar por su origen los datos con los que cuenta el ánima para resolver el problema de la resolución, como sigue. A la apariencia del problema de la supervivencia la denominaremos *percepción*. A su propio estado, estado de ánimo, lo denominaremos *emoción*. Por último, a la información proviniente de resto del conocedor la llamaremos *propiocepción*.

6.2.2 La mente

La mente debe ser capaz de buscar soluciones de varias maneras. Sabemos que si el conocedor dispone de una lógica interna simbólica, entonces esta mente simbólica es capaz de cualquier resolución.

6.3 Definición

Para mejorar al aprendiz, al adaptador y al mecanismo, no hace falta que el conocedor sea capaz de cualquier resolución. Bastan dos condiciones: la *condición de resolución*, esto es, que la mente del conocedor sea capaz de resolver, al menos, como el aprendiz, como el adaptador y como el mecanismo (véase la §4.6); y la *condición de conocimiento*, es decir, que el ánima del conocedor decida resolver como el aprendiz cuando se enfrente a un universo $\mathcal{U}$ en el cual sobreviviría el aprendiz, o como el adaptador frente a un universo que el adaptador solucionaría, o como el mecanismo en un universo en el que sobreviviría el mecanismo. Si se cumplen estas dos condiciones, entonces el conocedor $\mathcal{A}_3$ mejora al aprendiz $\mathcal{A}_2$, al adaptador $\mathcal{A}_1$ y al mecanismo $\mathcal{A}_0$: $\mathcal{A}_3 \succeq \mathcal{A}_2 \succeq \mathcal{A}_1 \succeq \mathcal{A}_0$.

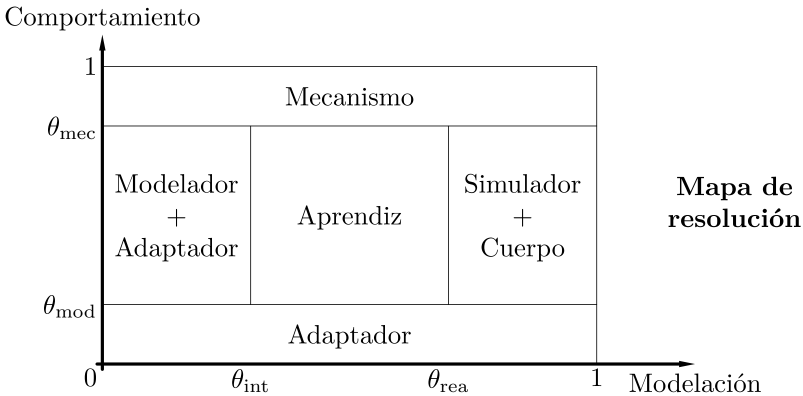
Si la mente es simbólica entonces el conocedor cumple sobradamente la condición de resolución.

6.4 El conocedor simple

Un conocedor fácilmente implementable puede servir como ejemplo de los conceptos definidos. Lo llamaremos *conocedor simple*.

Sólo es capaz de un número finito de resoluciones, de modo que no se trata necesariamente de un conocedor simbólico. En concreto, su mente dispone de cuatro módulos: i) un modelador para poder trasladar el problema de la supervivencia como un aprendiz, ii) un simulador para resolver el problema del aprendiz si es preciso, iii) un gobernador homeostático capaz de requerir aleatoriamente un comportamiento y iv) un cuerpo capaz de ejecutar varios comportamientos o soluciones a requerimiento, según lo decida el ánima, o bien del simulador o bien del gobernador. Además, la mente es tal que el funcionamiento de estos módulos puede inhibirse a petición del ánima. Por último, la conexión de estos módulos sigue las pautas del aprendiz y el adaptador, pero también está mediatizada por el ánima, que determina cuándo debe, y cuándo no debe, fluir la información entre ellos.

El funcionamiento del ánima se basa en un *mapa de resolución*, o *mapa de emociones*, con dos ejes perpendiculares. Un eje marca la bondad de la modelación y el otro la bondad del comportamiento.



- Si la valoración obtenida por el comportamiento aplicado está por encima de un determinado umbral, que denominaremos *umbral de mecanización* (θ_{mec}), entonces el ánima considera felizmente solucionado el problema de la supervivencia e inhibe todos los módulos de la mente excepto el cuerpo, que ejecuta mecánicamente el comportamiento.

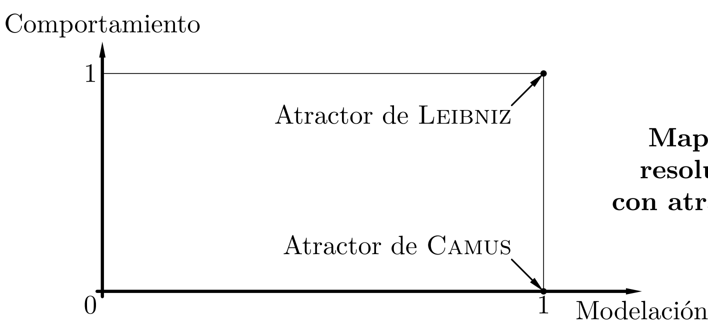
- Pero, si la valoración obtenida por el comportamiento aplicado no alcanza otro *umbral de modelación* (θ_{mod}), menor que el umbral de mecanización, entonces el ánima inhibe tanto al modelador como al simulador y deja que el conocedor funcione como un adaptador homeostático.

- Si la valoración obtenida por el comportamiento supera el umbral de modelación pero no alcanza el umbral de mecanización, entonces la actuación del ánima depende de la bondad del mejor modelo encontrado hasta el momento, o sea, de la bondad de la realidad.
    - Si el acierto de las predicciones de la realidad está por encima de cierto umbral, que denominaremos *umbral de la realidad* (θ_{rea}), entonces inhibirá el funcionamiento del modelador y del gobernador, y hará que el simulador trabaje sobre la realidad y suministre el comportamiento al cuerpo.

- Pero, si el acierto de las predicciones del mejor modelo está por debajo de otro umbral, el *umbral de inteligibilidad* (θ_{int}), menor que el umbral de la realidad, entonces inhibirá al simulador, no al modelador, y hará que el gobernador homeostático rija el cuerpo.
- Por último, si el acierto de las predicciones del mejor modelo encontrado supera el umbral de inteligibilidad pero no alcanza el umbral de la realidad, entonces sólo inhibirá al gobernador y el conocedor funcionará como un aprendiz.

Para que el ánima pueda funcionar de este modo, precisa tener, en todo instante, información sobre el lugar del mapa de resolución en el que se encuentra. Para conocer la bondad del comportamiento aplicado le basta disponer de las variables valoradas y estar al tanto de cuándo se producen los cambios de comportamiento, pero para conocer la bondad de la modelación precisa disponer de la predicción del mejor de los modelos encontrados hasta ese instante y de toda la percepción procedente del universo exterior. Nótese que precisa esas predicciones incluso cuando el modelador y el simulador están inhibidos.

Aun siendo éste el conocedor simple, supone una mejora con respecto al aprendiz. En concreto no es propenso a la enfermedad de Camus que puede sufrir un aprendiz, pero que no sufre un adaptador (véase la §3.6). Para percatarse de este hecho, basta observar que el atractor de Camus queda en la zona donde el conocedor actúa como adaptador. El atractor de Camus se sitúa dentro del mapa de resolución en el punto donde el comportamiento es pésimo, no obtiene premio alguno, pero la realidad es infalible, acierta todas las predicciones.



Mapa de resolución con atractores

6.5 El conocedor simbólico

6.5.1 Justificación

El conocedor simple está muy cerca del mecanismo, del adaptador y del aprendiz por lo que sirve para explicar el salto que existe desde el aprendiz hasta el conocedor. Queda por explicar el salto evolutivo que existe desde el conocedor simple hasta el conocedor simbólico.

El mecanismo, el adaptador y el aprendiz sólo son capaces de una única resolución, en concreto de la resolución mostrada en la §4.6. Pero hay, como ya sabemos, muchas otras resoluciones, de manera que existen otros tantos mono-resolutores. Por lo tanto, en un proceso evolutivo lo suficientemente rico existirán nichos —un *nicho* es un lugar que cumple determinadas condiciones— apropiados para muchos de los diferentes mono-resolutores.

Un nicho con las condiciones suficientes para ser ocupado por adaptadores y por aprendices puede ser tomado por un conocedor simple, pero no así otros nichos con otras condiciones. Llamando poli-resolutores a los autómatas que, como el conocedor simple, son capaces de un número finito de resoluciones, estos otros nichos podrían ser tomados por los poli-resolutores apropiados.

Pero, siguiendo en esta línea, no sólo los mono-resolutores pueden ser mejorados por poli-resolutores, sino que los mismos poli-resolutores pueden ser mejorados por otros poli-resolutores capaces de más resoluciones. En este caso, llegará un momento en el que el conocedor simbólico, capaz de cualquier resolución, represente una mejora evolutiva ineludible.

6.5.2 Definición

La diferencia entre un conocedor simbólico y otro conocedor no simbólico, como el conocedor simple, está en su mente. La mente del conocedor simbólico tiene dos capas, una semántica y otra sintáctica. La novedad del conocedor simbólico es la sintaxis, ya que semántica la tienen todos los resolutores.

Porque una mente simbólica es un resolutor general de problemas, resulta que el problema de la resolución, que debe resolver el ánima, está completamente abierto; hay que determinar una libertad inacabable y, consecuentemente, es más difícil. Si el ánima del conocedor simple lo resolvía por el expediente de la solución conocida, el ánima de un buen conocedor simbólico debe disponer de todos los recursos que la teoría del problema ha presentado. Esto no es un problema para el conocedor simbólico ya que su peculiaridad consiste, precisamente, en disponer de una lógica interna capaz de todos los recursos de resolución. Por lo tanto, en el caso del conocedor simbólico, una implementación muy económica se consigue construyendo sintácticamente el ánima. Si prescindimos de otros tipos de conocedores simbólicos más complejos que podrían ser diseñados, podemos alcanzar la conclusión siguiente. El conocedor simbólico es, en la lógica externa, un motor sintáctico, y nada más.

La configuración sintáctica del conocedor simbólico marca la diferencia en poder resolutivo entre los diferentes conocedores simbólicos pero es invisible en la lógica externa. Sólo se ve el motor sintáctico. Y toda la evolución subsiguiente es invisible.

6.5.3 Ejemplo

En un conocedor simbólico el ánima pasa a ser, simplemente, el elemento sintáctico que rige y organiza a los otros elementos sintácticos. A continuación se presenta un ejemplo de esta organización sintáctica.

El ánima ha de decidir qué tipo de resolución intentar para ejecutarla, éste es el problema de la resolución. Al construir el árbol de resolución, el ánima está planteando el conjunto de problemas que debe resolver la mente. El árbol de resolución puede ser construido de una vez, pero aquí mostraremos cómo podría hacerse una construcción gradual. En este caso el ánima, enfrentada a cada nuevo problema, determina el tipo de resolución básica que debe aplicar la mente para su resolución.

Supuesto que la mente del conocedor tiene un catálogo de problemas con solución conocida y que el ánima decide intentar una resolución por solución conocida, el *problema de la recuperación* consiste en determinar cómo se recupera la solución de la mejor de las maneras posibles. Si el catálogo de problemas solucionados pudiera crecer, entonces otro *problema de catalogación* consistiría en determinar cómo organizar el catálogo.

Supuesto que el ánima decide aplicar una resolución por tanteo, aparecen dos nuevos problemas, el *problema de la acotación* o determinar qué conjunto de posibles soluciones probar, y el *problema de la búsqueda* o decidir qué método u orden de búsqueda se aplica.

Y supuesto que el ánima determina trasladar un problema, aparece inmediatamente el *problema de la traslación*, que consiste en decidir qué traslación concreta se aplica. Resolver por traslación el problema de la traslación no es un juego de palabras, sino una posibilidad.

Todos estos problemas que surgen una vez el ánima ha instruido a la mente sobre el modo de resolución básico a emplear, también deben ser resueltos. Como es el ánima quien determina el modo de resolución, resulta que el proceso de construcción gradual del árbol discurre, en este caso, como un diálogo continuo entre el ánima y la mente.

6.6 Conclusión

Son conocedores todos los autómatas capaces de resolver el problema de la supervivencia de varias maneras. El conocedor es respecto a las resoluciones lo que el adaptador era respecto a las soluciones.

Son conocedores simbólicos todos los autómatas capaces de resolver el problema de la supervivencia de cualquiera de las maneras posibles, apareciéndose, en la lógica externa, como un motor sintáctico. Así como el aprendiz interioriza el problema de la supervivencia, el conocedor simbólico interioriza la evolución resolutiva del problema de la supervivencia. Con el conocedor simbólico culmina la evolución física.

7 El sujeto

7.1 Una advertencia

El conocedor simbólico marca el final de la evolución física por ser el asiento de toda la posterior evolución cognitiva. No describiremos la evolución cognitiva con el mismo nivel de precisión y detalle con el que describimos la evolución física, porque todavía es un terreno poco explorado. Más que explicar, esbozaremos una explicación, de manera que no será posible implementar un *sujeto*, que así llamaremos al conocedor simbólico mejorado, a partir de las ideas aquí esbozadas. Del mismo modo, es posible que el desarrollo de la teoría llegue a demostrar que desde el conocedor simbólico hasta el sujeto son precisos pasos intermedios, pero es más probable que no. Es incluso posible que no tenga sentido hablar de un conocedor simbólico que no sea un sujeto.

7.2 La complejidad

Supondremos que el principal problema que ha de resolver un conocedor simbólico es el de manejar un enorme caudal de percepciones. Esta suposición, cuya bondad sólo podrá ser evaluada cuando se complete la teoría, se apoya en una intuición, a saber, que la gran complejidad de un motor sintáctico sólo puede justificarse si el problema a resolver es igualmente complejo. En un problema aparente la complejidad sólo se puede medir por el número de variables aparentes, **n**, **v** y **m**, y su frecuencia de cambio.

Como ya vimos al tratar sobre las lógicas analíticas, la manera de disminuir la complejidad de un problema consiste en hacer partes, o sea, en hacer una traslación de la que resulte un cierto número de problemas trasladados más sencillos. Esto puede hacerse también con problemas aparentes, dividiendo en grupos las variables aparentes, o sea, partiendo la apariencia.

Trataremos primero la partición del problema aparente y después la del problema simbólico. Si la complejidad del problema de la supervivencia para el sujeto es tan grande como suponemos, es muy posible que ambas sean necesarias, aunque la partición del problema aparente suponga una etapa de preprocesamiento no simbólico que, teóricamente, podríamos omitir. No la omitiremos porque ayuda a entender y explica algunas peculiaridades.

7.3 La partición aparente

7.3.1 La modelación analítica

Se puede suponer que el universo es un todo compuesto de varias partes. Para representar más claramente la situación tomaremos el álgebra automática como base de estos razonamientos. En este caso se puede suponer que el autómata $\mathcal{R}$, que es la realidad, o sea, el reflejo interno del universo exterior, se compone de una serie de autómatas $\mathcal{R}_i$ conectados de una determinada manera. La modelación puede entonces reconstruirse en la forma de dos problemas relacionados. Uno, el *problema de la partición*, consistirá en determinar cómo están conectadas las partes $\mathcal{R}_i$, esto es, qué variables de salida de cada uno son qué variables de entrada de cada otro. El otro problema, la *particularización*, consistirá en modelar cada parte, esto es, determinar cómo es cada uno de los autómatas $\mathcal{R}_i$.

La efectividad de la modelación analítica será mayor si el conexionado es tal que la modelación de una parte puede ser hecha independientemente de la modelación de la mayoría de las otras partes. Esta condición se cumpliría completamente si ninguna variable de salida de una parte $\mathcal{R}_j$ fuera una variable de entrada a otra parte $\mathcal{R}_k$; esto es, si la realidad $\mathcal{R}$ fuera, salvo reorganizaciones o encaminamientos de las variables, un paralelo de sus partes, $\mathcal{R} = \otimes^n \mathcal{R}_i$.

Otra condición que se impone a la modelación analítica es que el problema del aprendiz resultante, o sea, el problema de la supervivencia en el que la realidad $\mathcal{R}$ ahora compuesta de varias partes $\mathcal{R}_i$ sustituye al universo $\mathcal{U}$, pueda ser descompuesto en varios problemas independientes. Esta condición se cumpliría completamente en las mismas circunstancias que la condición anterior, o sea, si $\mathcal{R} = \otimes^n \mathcal{R}_i$.

En general el requisito de independencia luchará contra la condición de modelación que requiere que puedan predecirse las reacciones del universo. Cuando prevalece el requisito de independencia sobre la condición de modelación ocurre una *ilusión* que es, pues, una distorsión que se impone a la realidad para simplificarla.

7.3.2 La resolución analítica

Hemos tratado los universos partidos, y ahora trataremos las soluciones partidas, porque también puede suponerse, si ello proporciona algún beneficio, que la solución es un todo partido.

La resolución de un problema por partes, o *resolución analítica*, consiste en determinar la disposición y el contenido de las partes, de modo que la solución sea un todo adecuadamente partido. El número de partes puede ser uno, 1.

La resolución analítica de un problema, como la modelación analítica, puede verse como la resolución de dos subproblemas: el problema de la partición, que consiste en determinar la mejor partición del todo, y la particularización, que, en este caso, consiste en determinar el contenido de cada parte de manera que el todo solucione el problema.

También en este caso, como en el de la modelación analítica, para poder sacar partido de la partición, conviene que la particularización de cada parte pueda ser hecha con independencia de la de las demás.

7.3.3 La partición y la particularización

Dada la naturaleza de las lógicas analíticas, la resolución del problema de la partición puede ser hecha gradual o reiteradamente. Es decir, que una vez partido el todo, la particularización de una parte puede recomenzar el ciclo, esto es, la parte puede ser partida.

El problema de la partición y la particularización están relacionados. Si vale suponer que la bondad de una partición es igual a la bondad de la mejor de sus particularizaciones, entonces es posible una resolución a dos velocidades, una lenta en la que se busca la mejor partición y otra, más rápida, en la que se busca, para cada partición propuesta, la mejor particularización. Pero también son posibles otras modalidades en las que la interacción entre ambos problemas es menos jerárquica. Por ejemplo, puede ser interesante modificar una de las partes de la partición, digamos uniéndola a alguna otra, cuando se descubre que su particularización es difícil.

7.3.4 La atención

A la facultad de resolver una de las partes del problema, y no las otras partes, la denominamos *atención*. Determinar qué partes atender, y cuáles no, es resolver un problema que denominamos el *problema de la atención*.

La atención permite concentrar el uso de los recursos en una de las partes en las que ha quedado partido un problema, lo que, dada la inevitable finitud de los recursos disponibles, justifica la necesidad de una resolución analítica del problema de la supervivencia.

La atención presupone la independencia de las partes. La atención convierte a la parte en *objeto*.

7.3.5 Las ilusiones

Hemos visto que algunas ilusiones se deben a que la resolución del problema de la partición en la modelación es demasiado rígida, tendiendo a hacer objetos donde sería mejor no hacerlos. Otras ilusiones se deberán, seguramente, a fallos en la resolución del problema de la atención en la modelación, que provocarán que no se atienda lo que efectivamente importa.

7.3.6 El preproceso

Podemos imaginar un sujeto que efectúe una modelación analítica, resolviendo o no, analíticamente o no, algunos de los problemas parciales. Los problemas solucionados en esta etapa previa de preprocesamiento no necesariamente simbólico, pero sí analítico, no alcanzarán el simbolismo.

En el caso de este sujeto con preprocesamiento de la apariencia, lo que alcanza la parte simbólica no es la apariencia bruta sino una apariencia de objetos. Esto no es fundamental para la teoría del sujeto, pero puede explicar algunas peculiaridades, como las ilusiones, que afectan a las personas.

7.4 La partición simbólica

7.4.1 Un planteamiento general

La partición simbólica se produce al aplicar a la expresión que representa un determinado problema, $\wp?$, una traslación $\aleph$ que la transforma en otra expresión que integra a un cierto número de expresiones, cada una de las cuales representa un subproblema, o sea, un nuevo problema. La manera de integrar estas expresiones debe indicar los condicionantes que cada subproblema impone sobre el problema total, por ejemplo, si solucionar un subproblema concreto es indispensable para solucionar el problema total o si con solucionar uno de los subproblemas es suficiente. Podemos suponer que los subproblemas quedan integrados en una expresión booleana que indica estas condiciones, y lo representaremos así:

$$\aleph(\wp?) = \wedge_i \vee_j \neg_k \; \wp?_{ijk}.$$

Este planteamiento es demasiado general y, sobre todo, es demasiado rígido, de modo que es posible que no se pueda alcanzar una solución que cumpla todas las condiciones, en cuyo caso todo el costoso proceso resolutivo sería inútil.

7.4.2 La consciencia

A continuación, no siendo capaces de diseñar completamente un sujeto, nos limitaremos a apuntar algunas posibilidades.

Para posibilitar la resolución de un gran número de problemas es necesario resolver muchos de ellos simultáneamente, en paralelo, y para asegurar la coherencia y la armonía de todos se puede erigir una estructura jerárquica que controle el proceso. Sea la *consciencia* el nivel superior de esta jerarquía, cuyo objetivo es asegurar la unidad del sujeto y que para ello sólo tratará un único problema, en cada momento el más difícil de reconciliar con los ya solucionados. Esto significa que el sujeto tendrá un pensamiento básicamente paralelo pero sólo tendrá consciencia de una secuencia de pensamiento.

La herramienta de trabajo de la consciencia es el yo. El yo es la solución encontrada hasta el momento, de modo que cuando un nuevo problema alcanza la consciencia lo primero es comprobar si el yo, tal como está definido en ese momento, soluciona el problema. Para ello lo más probable es que haya de reducirse el yo total a los aspectos, en forma de valores y creencias, que son de interés en el problema planteado (véase la §7.4.3).

La consciencia reconstruye un único problema del cual el yo es la solución única. Llamaremos *problema del sujeto* a este problema, que es una versión simbólica y resumida del problema interiorizado de la supervivencia. Se efectúan tres resúmenes: primero la apariencia bruta se simplifica como una apariencia de objetos, después, de entre todos los problemas simbólicos a resolver en cada momento, sólo uno alcanza la consciencia donde, por último, este problema se unifica con todos los problemas que ya la alcanzaron con anterioridad.

La consciencia debe disponer de canales de comunicación con los niveles inferiores. La utilidad principal de estos canales descendentes será la de trasladar información relativa al filtrado de los problemas ascendentes. Por ejemplo, un problema mecanizado no debe alcanzar la consciencia; y recuérdese (en la §6.4) que el conocedor simple ya era capaz de mecanizar problemas.

Como consecuencia de esta organización del sujeto, si fuera precisa la comunicación entre sujetos, entonces lo más eficiente sería comunicar los problemas, soluciones y resoluciones que alcanzan la consciencia, porque son los más importantes para el sujeto, y utilizando la misma sintaxis que utiliza la mente del sujeto, porque al no requerir traducción exigiría el mínimo esfuerzo de computación.

7.4.3 El yo

El *yo* es la solución del problema del sujeto, por lo que sustituye a la incógnita, o sea, ocupa en el problema el lugar de la libertad, y por esto el sujeto experimenta el yo como el lugar en donde está el *libre albedrío*. Pero el propósito del yo, como el de la consciencia, es dar unidad al sujeto, por lo que el yo ha de ser la solución única de todos los problemas que van llegando a la consciencia. Así pues, la tarea del yo consiste en facilitar la interacción entre distintos problemas, trasladando condiciones desde los ya pasados hasta el presente.

Por consiguiente, el yo tiene que ser una solución abierta al futuro, y no una solución definitiva, o cerrada. El yo no puede ser un comportamiento, ya que si el yo, que compendia el pasado del sujeto, fuera un comportamiento, entonces sería imposible determinar, a la llegada de cada nuevo problema a la consciencia, las consecuencias que acarrearía sobre los problemas previamente solucionados, pero ya olvidados, modificar tal comportamiento. La consciencia necesita retener más información que la contenida en un comportamiento para resolver su difícil problema.

Por no hacer el problema de la consciencia aún más arduo es por lo que los problemas mecanizados, que son aquéllos a los que ya se les ha encontrado una solución definitiva, no deben alcanzar la consciencia. Incluso aquellos otros problemas para los que el sujeto no ha encontrado el comportamiento que los reduce, o sea, no mecanizados, pero de los que conoce un modo de resolución que los soluciona definitivamente, también deben ser apartados de la consciencia.

Eliminados de la consciencia aquellos problemas para los que el sujeto tiene una solución o, al menos, una resolución definitiva, sólo quedan en ella los problemas abiertos. Por esto el sujeto, en vez de codificar el yo como una solución, cerrada, codifica el yo como un problema, abierto. La tarea de la consciencia es así factible, ya que si el nuevo problema es idéntico al anterior, excepto porque incluye una condición adicional, entonces la solución del nuevo problema también es solución del anterior. Además, puesto que el sujeto es un muy potente resolutor de problemas simbólicos, la transición desde el problema hasta su solución le resulta fácil, y el sujeto puede usar, y usa, el problema para referirse perifrásticamente a su solución. El yo se presenta, a la vez, como el problema del sujeto y su solución.

La tarea de la consciencia consiste en reformular el nuevo problema que la alcanza como una condición adicional del problema anterior. Denominamos *creencias* a las condiciones que definen el yo.

Las creencias son acumulativas.

La acumulación de condiciones vale hasta que el problema se queda sin solución. Este yo paradójico, que es problema pero no solución (véase la §5.7.1), es inviable. Para paliar la situación, el sujeto limita el ámbito de aplicación de las creencias conflictivas estableciendo qué creencias son pertinentes en cada circunstancia. Llamamos *valores* a las condiciones que rigen sobre las creencias, o sobre otros valores, siendo condiciones de condiciones. A diferencia de las creencias, los valores no son acumulativos, ya que son jerárquicos.

Cuando aparecen contradicciones entre los propios valores tiene lugar una crisis de valores. Entonces el sujeto puede ignorar, momentáneamente, la nueva creencia, o alguna de las creencias previas que ésta contradice. A la larga, sin embargo, esta negación de la realidad amenaza la coherencia del sujeto. Otra posibilidad, más compleja, consiste en reorganizar el sistema de valores. Y si la consciencia no fuera capaz de superar la crisis de valores, entonces la reestructuración, que sería aún más complicada, habría de alcanzar los dominios del inconsciente, cuyo estudio inició Freud[49].

Esas peligrosas situaciones paradójicas en las cuales el problema del sujeto se queda sin solución han de ser excepcionales o, dicho de otro modo, el problema del sujeto tendrá normalmente muchas soluciones. Luego en circunstancias normales, los valores y creencias que delimitan el yo son insuficientes para determinar el comportamento consciente del sujeto, y de aquí la necesidad de la voluntad. La *voluntad* es el dato libre, o sea, no condicionado por el problema de la supervivencia, que utiliza el sujeto para determinar su comportamiento consciente, una vez considerados sus valores y sus creencias. Podemos llamar *gustos* a las pautas que organizan la voluntad.

Mientras el aprendiz solamente modelaba la apariencia, el sujeto modela todo el problema de la supervivencia. Así que conviene definir la realidad como aquella parte de la condición del problema que sustituye convenientemente a la apariencia, porque de este modo vale tanto para el aprendiz como para el sujeto. Definida de esta manera, la realidad del sujeto es gradual, ya que los valores y las creencias son tanto más reales cuanto más útiles resultan en la predicción de la futura apariencia.

No iremos más allá. Lo importante es que conceptos tan escurridizos como consciencia y yo pueden corresponder a entidades operativas dentro de la teoría presentada.

---

[49] Freud, S. (1900): *La interpretación de los sueños.*

7.5 Conclusión

Un *sujeto* es un conocedor simbólico capaz de enfrentarse a un problema de la supervivencia complejo. Para ello dispone de una estructura de resolución jerárquica a cuya cúspide denominamos consciencia. El objetivo de la consciencia es dar unidad al sujeto. La herramienta de la consciencia es el yo.

El yo es la solución del problema que, al resolverse, determina el comportamiento consciente del sujeto, pero no cristaliza como comportamiento, sino que permanece definido como problema. Por esto, el yo es libertad condicionada, siendo los valores y las creencias las condiciones que lo definen por delimitación.

El hilo de la consciencia en donde habita el yo del sujeto es el resumen de la trama de corrientes inconscientes que se urden con la apariencia de objetos resultante del preprocesamiento no simbólico de la apariencia bruta.

8 La solución

8.1 Segunda advertencia

Hemos descrito una cierta secuencia resolutiva del problema aparente. La secuencia tiene algún interés en sí misma, pero sería mucho más interesante si tuviese alguna relación con la evolución darwiniana[50] de la que es resultado la persona.

A continuación trataremos de deducir algunos rasgos del sujeto. Si alguna persona piensa que tales rasgos son imposibles en una persona, entonces o bien estamos deduciendo incorrectamente la filosofía del sujeto o bien la secuencia resolutiva mostrada sólo tiene el interés de ser una de las resoluciones teóricas del problema aparente.

Debe advertirse que el contenido de este capítulo es filosófico, metafísico según veremos, por lo que sus aseveraciones no pueden ser verificadas objetivamente como las de los capítulos precedentes. Por esta razón pasaré a ser beligerante y utilizaré la primera persona para expresar mis opiniones.

8.2 El subjetivismo

El sujeto no sabe del sujeto, sino que el sujeto se ve como su yo. Yo soy un yo sabiéndome yo.

El yo es libertad ejercitada, o sea, es libertad condicionada por la biografía y la necesidad de vivir. Yo soy libre, dispongo de libre albedrío.

El sujeto trata, sin descanso, de no fallar en la resolución del problema aparente de la supervivencia. Yo quiero vivir.

El sujeto tiene una lógica simbólica, con sintaxis y semántica. La sintaxis es lo que permite pasar, de tratar soluciones, a tratar problemas y resoluciones. Hay un problema y yo soy la solución.

Pero algún sujeto, como resolutor general de problemas, puede llegar a percatarse de que si el problema de la supervivencia tuviera una solución, entonces no le haría falta ser un resolutor general de problemas y le bastaría con ser un ejecutor de la solución concreta. Yo moriré.

El problema que llega a la consciencia del sujeto, es decir, el problema del sujeto, es un resumen extremado del problema de la supervivencia. Es un problema interior, simbólico o sintáctico, que

[50] Darwin, Ch. (1859): *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life.*

resulta de la traslación del problema exterior de la supervivencia. Yo estoy en un mundo sintáctico.

El sujeto no puede representarse algo que no sea representable en su lógica. Por esto el sujeto considera que su lógica puede explicarlo todo, es decir, considera que es completa, comprensiva. Yo puedo saberlo todo.

La sintaxis exige una gran cantidad de recursos de computación y tiene autonomía, aunque carece de valor en cuanto pierde la referencia semántica que, en última instancia, proviene del problema de la supervivencia. Yo puedo saber absurdos, paradojas.

La *filosofía subjetiva* mantiene la primacía de la apariencia hasta sus últimas consecuencias. O sea, la filosofía subjetiva postula que puede prescindirse del problema exterior y de la lógica externa pero no de la apariencia exterior y, si se mantiene el problema interior y la lógica interna, nada cambia visto desde el interior.

8.3 El mundo

El sujeto modela, no solamente la apariencia, sino el problema de la supervivencia entero. En el problema del sujeto, la realidad sustituye a la apariencia, o sea, al exterior. El sujeto es libre de hacer su voluntad, pero si no somete la realidad a la apariencia, entonces errará sus predicciones y sus cálculos serán equivocados. Entre la libre voluntad y la sometida realidad se encuentra la libertad en todos sus grados.

Queda el todo, que llamamos *mundo*, partido en dos[51]: la realidad, exterior y sometida a las leyes de la naturaleza; y yo, interior, que residiendo en la libertad me rijo por mi voluntad. La realidad no lo es todo. Yo quedo fuera de la realidad. La libertad es un concepto ajeno a la realidad.

8.4 El conocimiento

8.4.1 La descripción

La realidad es la mejor descripción que tenemos de la apariencia externa. Se puede suponer, si ello tiene algún valor epistemológico, que la apariencia externa es generada por el *cosmos*. Si se acepta esta suposición, entonces se sigue que la realidad y el cosmos deben de ser, aproximadamente, iguales.

[51] Schopenhauer, A. (1818): *El mundo como voluntad y representación.*

La realidad tiene como objetivo inmediato permitir la solución del problema del sujeto y como objetivo final permitir la solución del problema de la supervivencia. Para cumplir ambos objetivos, la realidad tiene que describir la apariencia externa, ésta es la *exigencia descriptiva*. Interesan las descripciones que permitan prever lo que pasará, ya que como vimos en el caso del aprendiz (en la §3.2.1), el beneficio de la lógica interna se realiza si la realidad adelanta a la apariencia. En resumen, *conocer* es describir y el *conocimiento* individual es la realidad de cada uno.

Una realidad determinística facilita la resolución del problema del sujeto. A la exigencia de una realidad determinística la denominamos *exigencia determinística* y su campeón fue EINSTEIN. Pero la exigencia descriptiva es más fuerte que la determinística, como arguyó BOHR, porque la primera atañe al problema y la segunda a su resolución.

La tarea de definir una realidad interpersonal, teniendo en cuenta la exigencia descriptiva, es denominada *ciencia*. El resultado de la ciencia, denominado conocimiento científico, es una descripción de la apariencia externa de validez social realizada en cierto lenguaje simbólico. Llamaremos *matemáticas* a la rama de la ciencia interesada en el lenguaje simbólico descriptivo y *física* a la rama de la ciencia interesada por las descripciones.

La realidad es objetiva. Esto significa que es imposición, que, independientemente de la voluntad del yo, se puede comprobar si una descripción salva la exigencia descriptiva, o no. El conocimiento es objetivo, por serlo cada realidad. Surgen dificultades[52,53] porque la realidad del sujeto es gradual y su apariencia no es la apariencia bruta, de manera que resulta difícil distinguir la apariencia (la observación) de la realidad (la teoría), aunque en la práctica científica no parece imposible valorar el alcance predictivo de las teorías.

Ni la realidad ni su versión social, el conocimiento científico, son definitivas. Esto es consecuencia de que el problema de la modelación es aparente (véase la §4.5), y por lo tanto no tiene una solución definitiva.

8.4.2 La física

Los fenómenos físicos son, en última instancia, mediciones. Medir es comparar contra cierto patrón elegido convencionalmente. Como

[52] Kuhn, Th.S. (1970): *The Structure of Scientific Revolutions.*

[53] Feyerabend, P. (1988): *Against Method.*

no tiene sentido medir el patrón, resulta que cualquier teoría física completa ha de ser paradójica.

Convendría tener todo el conocimiento reducido a una única descripción. Porque, de haber más, cada descripción proporcionaría una previsión y, no siendo coincidentes, no podría asegurarse lo que ocurriría en el futuro.

8.5 El saber

8.5.1 La explicación

No todo el saber es conocimiento. Llamamos *saber* a las explicaciones de la filosofía. Decimos que la *filosofía* explica porque llega hasta el final, es decir, hasta mi.

Es *explicación* la solución que yo juzgo buena. El cambio es peligroso, porque morir es cambiar. El no cambio es bueno, porque no cambiar es vivir. Para hacer bueno lo peligroso ha de convertirse el cambio en no cambio. Por esto, *explicar* es convertir el cambio en no cambio. El no cambio no ha de ser explicado.

Si algo cambia puedo pensar que no cambia, puedo pensar que toma diferentes aspectos. Llamo *ente* a aquello que no cambia sino de aspecto. Para que un ente no me perturbe debe ser inmutable y sus cambios de aspecto deben ser reducidos a leyes inmutables. Una ley inmutable enuncia que un ente determinado, en determinadas condiciones, siempre sufre un determinado cambio de aspecto. Puesto que ocurre siempre así, el cambio no debe ser considerado cambio. Empero, para poder despreciar el cambio, debe concederse una mayor importancia a la ley inmutable que al cambio por ella reducido. Niego el cambio inexplicable, o *caos*, porque me asusta.

La explicación es lo que yo tomo por bueno, y tomo la muerte por mala. Por esto la urgencia de la explicación es distraer la muerte. Dentro de la explicación estoy yo y mi vida. Si la explicación es completa y lo cubre todo, entonces he eliminado la muerte. Si hay distintas explicaciones para las distintas circunstancias, entonces no hay una explicación completa. Por lo tanto, quien consigue una explicación completa y única niega la muerte y su vida no es absurda; pero mi explicación no es completa.

Sé el pasado porque ya lo he convertido en no cambio. Ignoro el futuro porque es imposible eludir la muerte y convertirla en no cambio. Aunque es tan seguro que moriré como que he nacido, no es posible explicar la muerte.

8.5.2 La metafísica

La ciencia no sabe las explicaciones últimas, porque no me alcanza; la ciencia describe. Una descripción es una explicación, aunque no concluyente. Conocer es convertir la cambiante apariencia en símbolos permanentes. La explicación abarca todo el problema, incluye tanto la condición, y en ella la realidad, que es el modelo de la apariencia, como la libertad, que soy yo.

Denominamos *saber puro* a aquel saber que no es conocimiento. Por ejemplo, los fundamentos del conocimiento no son conocimiento, son saber puro. Denominamos *metafísica* a la parte de la filosofía que no es ciencia, es decir, la metafísica es el dominio del saber puro.

La realidad es objetiva, puede ser refinada para que describa mejor la apariencia externa, pero al abandonar los dominios del conocimiento, y penetrar en los del saber puro, se pierde toda referencia externa. Por consiguiente la metafísica, sin posibilidad de contraste contra el exterior, no es objetiva, es libre, es subjetiva. El saber puro se refiere a mi, y yo soy libertad y voluntad.

8.5.3 Historia

Desde que Descartes[54] argumentó que el saber seguro era el saber dentro del yo, el problema de la epistemología ha sido determinar la posibilidad del conocimiento. La solución del propio Descartes se basa en que yo soy finito pero tengo la idea del infinito. Como lo infinito no cabe en lo finito, tiene que existir lo infinito. Lo infinito es Dios, y Dios quiere que yo conozca el universo por Él creado.

Para el empirismo británico el conocimiento es el resultado de aplicar la operación de inferir a los datos de la experiencia, o sea, a la apariencia. Pero con Hume[55] esta posición llega al escepticismo, porque "si hubiera alguna sospecha de que el curso de la naturaleza pudiera cambiar, y que el pasado pudiera no ser pauta del futuro, toda experiencia se haría inútil, y no podría dar lugar a inferencia o conclusión alguna. Es imposible, por tanto, que argumentos algunos de la experiencia puedan demostrar esta semejanza del pasado con el futuro; puesto que todos estos argumentos están fundados sobre la suposición de aquella semejanza".

Kant[56] eliminó el *Deus ex machina*, superó el escepticismo y dio la primera solución al problema de la posibilidad del conocimiento.

---

[54] Descartes, R. (1637, 41): *Discurso del método, Meditaciones metafísicas.*

[55] Hume, D. (1748, 1777): *An Enquiry concerning Human Understanding.*

[56] Kant, I. (1781, 1787): *Crítica de la razón pura.*

Descubrió que es precisa una lógica del yo o, según la expresión de Kant, descubrió que existen los juicios sintéticos *a priori*, y entendió que el conocimiento era la apariencia del universo reducida a la lógica del yo o, según Kant, reducida a las categorías.

Pero para Kant las categorías eran necesarias (véase en su "Crítica de la razón pura", edición de 1787, la §27 de la analítica de los conceptos de la lógica transcendental). Esta proposición metafísica tiene como consecuencia, no sólo la posibilidad del conocimiento, sino también la posibilidad de un conocimiento absoluto o racional. La lógica, definida por sus categorías, ha de ser única si las categorías son necesariamente como son. Llamaremos *lógica universal*, o *razón*, a esta lógica única.

Supuesta la existencia de la lógica universal, si mi conocimiento salva la apariencia, como se creía que lo hacía la física de Newton, entonces la realidad es de la única manera racionalmente posible. Mi conocimiento es el conocimiento, no hay otro posible. La ciencia queda así fundada racionalmente, esto es, la ciencia no necesita de la metafísica para dar explicaciones completas y concluyentes.

Pero la necesidad de las categorías es un postulado demasiado exigente, y sólo es justificable si, por imperativos metafísicos, deseamos tener la posibilidad de alcanzar un conocimiento absoluto.

8.5.4 El límite

La necesidad de las categorías me coloca en una posición inmerecidamente favorable. ¿Por qué había yo de tener un conocimiento absoluto? (esto es, un conocimiento transcendente). El subjetivismo es pesimista, estima que el conocimiento no es absoluto y que las explicaciones últimas, que el conocimiento remite al saber puro, son libres e incompletas. Que mi conocimiento no sea absoluto tiene el atractivo de generalizar y congeniar con dos convicciones anteriores: que mi posición no es absoluta, convicción impuesta por Galileo, y que mi tiempo no es absoluto, convicción impuesta por Einstein.

Explicación subjetivista: Lo primero es el problema de la supervivencia, o sea, yo quiero vivir pero yo moriré. Puesto que el problema de la supervivencia se define en apariencias, las mejores soluciones son aquéllas capaces de resolver cualquier problema. Llamamos sujeto al resolutor general que, para poder resolver los problemas, ha de ser capaz de representarlos en su lógica simbólica. Un problema es la expresión de cierta libertad y cierta condición. Cuando el sujeto se representa el problema, su explicación es que la libertad soy yo y la condición es la realidad. Es entonces cuando el sujeto descubre que lo primero es el problema de la supervivencia, o sea, yo quiero vivir pero yo moriré.

La explicación subjetivista establece que la muerte es la causa de la explicación. La explicación de la muerte sería la explicación de la causa de la explicación. Por consiguiente, para el subjetivismo, ni la muerte ni la vida tienen explicación. El sujeto es un buscador compulsivo de explicaciones y, por esto, el sujeto busca explicaciones incluso donde no las hay.

Los límites del saber quedan establecidos así por el subjetivismo. Las descripciones del conocimiento pueden seguirse hasta llegar, finalmente, a las explicaciones del saber puro. Esto consiste en ubicar la realidad en el más amplio marco del problema de la supervivencia en el que estoy yo. Y las explicaciones del saber puro son libres pero incompletas.

El saber puro es libre porque se refiere a mi, que soy libertad. El saber puro es incompleto porque la muerte no puede explicarse. La muerte es el cambio que no puede tornarse no cambio. La muerte es el cambio.

Si defino el *sentido* como algo que me justifica desde afuera, algo cuyo valor es absoluto, o simplemente me transciende, entonces ni el mundo exterior ni yo mismo ni mi vida ni mi muerte tienen sentido.

Se explica para vivir, pero vivir no tiene explicación.

Morir tampoco.

8.5.5 La tolerancia

Para el subjetivismo, el saber puro es libre e incompleto. En negativo, esto significa que la metafísica no tiene condiciones y que la metafísica no es completa. Esta proposición metafísica, el saber puro es libre e incompleto, hace al subjetivismo tolerante y resignado.

Si la metafísica es incompleta, entonces no tenemos respuesta a todas las preguntas. Explicarlo todo es útil, pero sólo hasta que queremos explicar la causa de la explicación. Si la metafísica no tiene condiciones, entonces cualquier metafísica es posible. Así que la metafísica subjetiva no excluye a ninguna otra metafísica. Todo mi saber es demostrable y patente; pero también lo es el tuyo aunque difiera del mío.

Estoy diciendo que si se acepta la metafísica subjetivista, entonces se sigue que cualquier metafísica es posible. Aunque lo parezca, esto no es una contradicción, ya que también la metafísica subjetivista es posible. Pero es que, además, es un hecho que distintas personas sostienen metafísicas diferentes, por lo que cualquier metafísica que excluya a las demás es incapaz de acomodar este hecho.

8.5.6 El individuo

Puesto que mi lógica no es absoluta ni me transciende, mis explicaciones de la apariencia no son más valiosas que yo, o más exactamente, mis descripciones de la apariencia valen menos que mi vida.

Tú, una flor y el sol recibís significado de mi querer vivir. Es un significado subjetivo, no esencial. Si yo no tuviera ansia de vivir, entonces no necesitaría, ¿para qué?, explicar las apariencias; no habría problema ni realidad. Mi vida da significado a las descripciones y, en general, a las explicaciones.

El *individuo*, el yo que aparece con el sujeto, hace que parezca que la vida, o sea, el problema de la supervivencia, es un problema del individuo. No es así. Que la consciencia de la vida aparezca en individuos, en yoes indivisibles, no implica que la vida del individuo sea toda la vida. Además, ocurre que si yo fuera el único ser vivo, entonces moriría rápidamente.

Mi vida es más que yo. Mi vida está constituida por muchos otros yoes y no yoes. El yo es intransferible, así que el otro yo es *él*. Disponer de una lógica simbólica y de un yo no es imprescindible para vivir. Una flor vive, aunque no se percate de ello.

Eres *tú* aquel otro yo, o él, con el que me estoy comunicando. Tú y yo nos traspasamos significados. Para ello es necesario que tú y yo compartamos la misma semántica. Compartir la sintaxis es útil, pero lo imprescindible es compartir la semántica, de manera que es posible comunicarse con animales que no disponen de una lógica simbólica, pero que comparten nuestra vida.

Porque mi vida no soy únicamente yo y porque yo puedo comunicarme contigo y con vosotros, es inteligente intentar la solución conjunta del problema de la supervivencia. Para que la comunicación sea útil debe eliminar aquello que sea peculiar de cada individuo. Denominamos *principio de intersubjetividad* a la eliminación de lo peculiar en la comunicación.

Por razones análogas, la ciencia (véase la §8.4.1) también debe acatar el principio de intersubjetividad. Por ejemplo, EINSTEIN usó explícitamente el principio de intersubjetividad en su teoría general de la relatividad, al señalar que las leyes físicas deben tener la misma forma sin importar cómo se mueva el sistema de referencia espaciotemporal respecto al que se efectúan las medidas.

8.5.7 Varias soluciones

El problema es que yo quiero vivir pero moriré. El problema tiene varias soluciones, o explicaciones, metafísicas.

Inmortalismo La primera reacción contra un problema es negarlo. No hay problema cuando la condición, la realidad, se somete al deseo. Yo quiero vivir y yo no moriré.

El cristianismo y muchas otras religiones son inmortalistas. Yo no moriré. El *alma* no cambia al morir, lo que permite convertir a la muerte, de cambio, en no cambio.

El *inmortalismo* niega el problema al negar la muerte.

Neutralismo También podría suceder que el problema fuese un problema, que el problema no tuviera solución, pero que el problema pudiera ser neutralizado. Para neutralizar un problema basta desestimar su valoración. Es decir, la eliminación del deseo de vivir neutraliza el problema. Yo no quiero vivir y yo moriré.

El budismo es neutralista. Culpa del sufrimiento y de la muerte al deseo. El estoicismo también es neutralista.

Para el *neutralismo* el problema queda neutralizado eliminando el deseo.

Fatalismo Podría ser que el problema no fuera, a pesar de parecerlo, un problema. Y si ocurre que alguien lo tiene por problema, se puede conceder que es un pseudoproblema, es decir, un problema ilusorio. Parece que yo quiero vivir y que yo moriré, pero esto es sólo una ilusión, es una manera de hablar.

Según el *materialismo* solamente existe aquello que puede ser descrito. Por lo tanto no hay metafísica, y toda la filosofía se reduce a la ciencia. La muerte no es un problema, porque incluso al morir se conserva la energía. El libre albedrío es ilusión.

Para el *fatalismo* no hay problema, ya que tampoco hay libertad.

Transcendentalismo La explicación transcendente utiliza el siguiente razonamiento: yo no puedo entender por qué me moriré porque, aunque mi muerte sí tiene explicación, ocurre que la explicación de mi muerte queda fuera del alcance de mi lógica.

Es difícil, o imposible, descubrir los límites de la lógica, porque ello ha de hacerse desde dentro de la lógica, y la lógica es la totalidad de lo que me es posible. Si se sospecha, como lo hace el taoísmo, que las limitaciones de la lógica son las causantes de nuestros males, y que el bien está más allá de la lógica, entonces la paradoja, lo que no puede ser sabido, se convierte en lo bueno. Dios, que para los cristianos es la explicación final, también aúna la bondad completa con la omnipotencia y la justicia absoluta, lo cual resulta paradójico. Pero el cristianismo sólo recurre a la paradoja para resolver problemas secundarios, por ejemplo para explicar la razón del sufrimiento injusto, mientras que el problema principal lo resuelve por el expediente de la inmortalidad.

Para el *transcendentalismo* el problema tiene una solución desconocida.

Escapismo La más común de las soluciones consiste en ignorar o evitar el problema. (Yo quiero vivir pero moriré).

Nótese que el transcendentalismo es una forma razonada de escapismo.

Para el *escapismo* el problema no debe ser planteado.

Subjetivismo Para el subjetivismo hay conceptos anteriores a la explicación. Estos conceptos no pueden ser explicados. Yo quiero vivir pero moriré.

Para el *subjetivismo* el problema no tiene solución.

8.5.8 La explicación subjetivista

Yo soy subjetivista. Mi explicación última, aquella explicación de la que no doy explicación, es la explicación subjetivista. La explicación subjetivista establece que el problema es anterior a la explicación, de manera que el problema primero no puede ser explicado. Esto evita, definitivamente, que se pueda intentar explicar la explicación, es decir, evita la regresión metafísica infinita. A cambio, no me preguntes por qué acepto la explicación subjetivista. Te lo repito, no explico la explicación subjetivista, la asumo.

Lo primero, el origen y la única fuente de significado, es el problema aparente, yo quiero vivir pero moriré. Si un problema aparente es complejo, entonces la evolución puede discurrir hasta el sujeto, o sea, puede toparse con un resolutor general organizado jerárquicamente en forma de conocedor simbólico provisto de consciencia y con un yo. Esto tiene varias consecuencias.

El sujeto es un conocedor simbólico que se ve, a sí mismo, como su yo. El yo es la incógnita del problema, el lugar de la libertad que debe rellenar a voluntad. De este modo, las explicaciones últimas, aquéllas que alcanzan el yo, son libres. El saber es libre.

La otra parte del problema es la realidad. Es la parte del problema que llamábamos condición. La realidad es objetiva, o sea, ajena a la libertad e independiente de la voluntad, y por esto decimos que se rige por leyes inmutables. El conocimiento es objetivo.

El sujeto es un conocedor simbólico cuyo yo vive en un mundo sintáctico. Así que, aunque considere que su lógica es completa porque es el conjunto de todo lo que puede imaginar ("nada ilógico *puede* ser pensado"), también puede saber paradojas, esto es, expresiones sintácticas sin relación posible con el problema aparente, expresiones sin significado.

La lógica del sujeto es contingente, un producto de la historia evolutiva, y no necesaria. No hay una lógica universal o razón. Esto significa que otra *inteligencia*, esto es, otro resolutor general tratando de resolver otro problema en otra lógica, no será considerada inteligencia.

El sujeto es un resolutor general, un buscador compulsivo de soluciones, de explicaciones. Y el problema más urgente es el primero, eludir la muerte. Desgraciadamente los problemas aparentes no tienen una solución definitiva, siendo ésa precisamente la razón por la cual la evolución puede llegar hasta el sujeto. Luego el sujeto es una prueba, para el propio sujeto, de que la muerte no puede ser explicada, aunque esa explicación sería suficiente.

Y aunque el saber es libre y cualquier metafísica es posible, yo creo que la explicación tiene límites. La tentación de explicar la muerte es fuerte y, por esto, la explicación absoluta tiene tanta urgencia. Pero yo soy incapaz de negar la libertad, o el deseo, o la muerte.

8.5.9 La muerte

"De lo que no se puede hablar hay que callar", concluyó WITTGENSTEIN. Es triste aceptar el consejo de WITTGENSTEIN y continuar elaborando explicaciones. Porque supone aceptar, con resignación, que mi imaginación está necesariamente limitada a los objetos de la lógica en la que trabaja. Porque supone entender que las explicaciones no explican. Que no se debe buscar ni una explicación ni un sentido a la vida, porque es para vivir para lo que se buscan las explicaciones. Que saber es sólo un medio, que el fin es sobrevivir. Que la forma que yo le doy a la realidad está al servicio de mi ansia compulsiva por sobrevivir. Y es triste porque, a pesar de todo, yo moriré.

Hasta he dado nombres a la muerte. Cada enfermedad es un nombre de la muerte. Parece entonces que es la enfermedad quien me mata, pero no es así. Simplemente moriré.

A El álgebra automática

A.1 General

Se presenta un álgebra de autómatas. Esto es, se formaliza el autómata finito, binario y probabilístico y sobre él se definen tres operaciones. Se describe tanto la estática como la dinámica de los autómatas y de las operaciones. Se demuestra constructivamente que cualquier autómata puede ser escrito como una expresión que sólo utiliza siete palabras diferentes. También se construye un autómata universal. Se definen las siguientes relaciones entre autómatas: igualdad, indistinguibilidad, equivalencia y ampliabilidad. Varios campos de las matemáticas resultan ser subálgebras del álgebra automática.

A.2 El vector

A.2.1 La variable

Una *variable* no cambia sino de *valor*. Una variable puede tomar valores distintos en momentos distintos. Si los posibles valores son dos, tenemos la *variable binaria*. De aquí en adelante supondremos que las variables son binarias, y en concreto denominaremos 1 a uno de los dos valores que pueden tomar y denominaremos 0 al otro de los valores, $\mathbb{B} = \{1, 0\}$. Otros tipos más complejos de variables pueden convertirse en una serie de variables binarias utilizando la codificación adecuada.

Un conjunto ordenado de $\mathbf{N}$ variables es un *vector* de $\mathbf{N}$ componentes. Denominaremos *string* al valor de un vector en un instante. A la secuencia de strings, según se desarrolla en el tiempo, la denominaremos *stream*.

A una disposición de números ordenada por índices la denominamos *array*, y decimos que tiene tantas dimensiones como índices utiliza. Así, un *string* es un array unidimensional, una *matriz* es un array bidimensional.

Un *índice* que haya de tomar n valores recorrerá, de mayor a menor, los n menores números naturales. Como los *números naturales*, $\mathbb{N}$, son el cero y los enteros positivos, es decir, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, el índice con n posibilidades tomará los valores desde el $n - 1$ hasta el 0, y en ese orden.

Si denominamos *rango* de un índice al número de valores que puede tomar, entonces el tamaño de un array se obtiene multiplicando los rangos de todos sus índices.

A.2.2 La formalización

Sea un vector, que llamaremos $\mathcal{V}$, con $\mathbf{N}$ variables. Como $\mathbf{N}$ variables binarias ordenadas son capaces de $2^{\mathbf{N}}$ combinaciones, asignamos a cada una de las distintas combinaciones un número diferente, o índice, comprendido entre el $2^{\mathbf{N}} - 1$ y el 0, ambos incluidos.

Escribimos $j \hookrightarrow \mathbf{N}$ para explicar que el índice j *recorre la potencia* del número $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$, es decir, para expresar que j toma valores desde $2^{\mathbf{N}} - 1$ hasta 0, ambos incluidos y en orden decreciente.

Nótese que estamos interpretando vectores binarios, de $\mathbf{N}$ componentes, como variables no binarias, con $2^{\mathbf{N}}$ posibles valores. Si la escritura de los números es binaria, entonces la diferencia es mínima. Al valor del vector, o string, binario de longitud $\ell = \mathbf{N}$,

$$S = [b_{\ell-1}\, b_{\ell-2}\, \ldots\, b_2\, b_1\, b_0],$$

con $b_i \in \mathbb{B} = \{1, 0\}$ y, por tanto, $S \in \mathbb{B}^\ell$, notando $\mathbb{B}^\ell$ el producto cartesiano de $\mathbb{B}$ por él mismo ℓ veces, le corresponde como índice el número

$$\overline{S} = b_{\ell-1}.2^{\ell-1} + b_{\ell-2}.2^{\ell-2} + \cdots + b_2.2^2 + b_1.2 + b_0 = \sum_{i=\ell-1}^{0} b_i.2^i.$$

Por ejemplo, al string $[1\,0\,1]$ le corresponde el índice binario 101, que en decimal se escribe 5:

$$\overline{[1\,0\,1]} = 101_2 = 5_{10}.$$

De este modo se justifica que nos refiramos indistintamente al índice o al correspondiente string de un vector.

Notamos $\mathcal{V}_r/2^{\mathbf{P}}$ la probabilidad de que el vector $\mathcal{V}$ tome el valor correspondiente al índice r. Sólo consideraremos valores naturales de $\mathcal{V}_r$ y $\mathbf{P}$. Con esta notación tenemos que $r \hookrightarrow \mathbf{N}$, con lo que resulta que $(\mathcal{V}_r)$ es una forma ordenada (de mayor a menor índice) de hacer referencia a $2^{\mathbf{N}}$ números. Así que $(\mathcal{V}_r)$ es un string de tamaño $2^{\mathbf{N}}$.

Si $\mathcal{V}$ es un vector, entonces podemos establecer la siguiente convención para describirlo probabilísticamente. Escribimos, en este orden: su número de variables, $\mathbf{N}$; $\mathbf{P}$, siendo $2^{\mathbf{P}}$ el divisor común de todas las probabilidades; y los $2^{\mathbf{N}}$ valores que toma $\mathcal{V}_r$ ordenados de mayor índice ($r = 2^{\mathbf{N}} - 1$) a menor índice ($r = 0$).

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{P}; (\mathcal{V}_r) \rangle \\ \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathcal{V}_r \in \mathbb{N} \\ r \hookrightarrow \mathbf{N} \\ \textstyle\sum_r \mathcal{V}_r = 2^{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Ejemplo Si $\mathcal{V} = \langle 3, 1; (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle$, entonces es tan probable que $\mathcal{V}$ tome el valor $[1\,0\,1]$ como el valor $[0\,0\,0]$.

A.2.3 La igualdad de vectores

La *igualdad de vectores*: decimos que dos vectores descritos probabilísticamente, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, son iguales, y lo notaremos $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, si y sólo si, por definición, $\mathbf{N}_{\mathcal{V}} = \mathbf{N}_{\mathcal{W}}$ y:

$$\forall r \hookrightarrow \mathbf{N}_{\mathcal{V}} = \mathbf{N}_{\mathcal{W}} : \; \frac{\mathcal{V}_r}{2^{\mathbf{P}_{\mathcal{V}}}} = \frac{\mathcal{W}_r}{2^{\mathbf{P}_{\mathcal{W}}}}.$$

A.2.4 Notación vectorial de strings

Si un vector es determinístico, $\mathbf{P} = 0$, entonces sólo toma un valor, aquél cuyo índice j es tal que $\mathcal{V}_j = 1$. Confundiendo el vector determinístico con el único valor que toma, podemos abusar de la descripción de vectores para anotar strings del siguiente modo: $S = \langle \ell, 0; (S_r) \rangle$, siendo $S_{\overline{S}} = 1$ y $S_{r \neq \overline{S}} = 0$.

Ejemplo El string $[1\,0\,1]$ se escribe, a la manera de los vectores, así: $\langle 3, 0; (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rangle$.

A.3 El autómata

Un *autómata finito* se compone de tres vectores y una ley de dependencia. Los tres vectores son: el vector de entrada con las variables de entrada, el vector de salida con las variables de salida y el vector de estado con las variables de estado.

La determinación de los valores de las variables de entrada queda fuera de la definición del autómata. Se dice que las variables de entrada son independientes.

Los valores que toman en este instante las variables de salida dependen de los valores que toman en este instante las variables de estado y las variables de entrada.

Los valores que tomarán en el instante siguiente las variables de estado dependen de los valores que toman en este instante las variables de estado y las variables de entrada. De otra manera, el string de estado siguiente depende del string de estado actual y del string de entrada actual. El string de estado siguiente y el string de estado actual son dos valores consecutivos del mismo vector.

$$
\text{Autómata}\left\{\begin{array}{l}
\text{Estática}\left\{\begin{array}{l}
\text{Notación } \mathcal{A} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_{sino}) \rangle \\
\text{Igualdad } = \\
\text{Operaciones}\left\{\begin{array}{l}
\text{Composición en serie } \oplus \\
\text{Composición en paralelo } \otimes \\
\text{Composición de realimentación } \odot
\end{array}\right. \\
\text{Función característica } \mathcal{F}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} = \odot^{\mathbf{S}} \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \\
\text{Formas canónicas}\left\{\begin{array}{l}
\text{Descodificada } \mathcal{A} = \text{Canon}_{\mathcal{A}} \\
\text{Universal } \mathcal{A} = \text{Kanon}_{\mathcal{A}}
\end{array}\right.
\end{array}\right. \\
\text{Dinámica}\left\{\begin{array}{l}
\text{Ecuación dinámica } \mathcal{Q} = \oplus \mathcal{P} \mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \oplus \otimes \mathcal{S} \mathcal{J} \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \\
\text{Ecuación temporal } \mathcal{N}(t) = \mathcal{S}(t+1) \\
\text{Función de transferencia } Z^{\mathcal{A}}_{S_0} \\
\text{Comportamiento}\left\{\begin{array}{l}
\text{Indistinguibilidad } \approx \\
\text{Equivalencia } \equiv
\end{array}\right. \\
\text{Dinámica compuesta } \mathcal{A} \approx \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \approx \mathcal{F}(\mathcal{A}')
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

A.4 La estática

A.4.1 La formalización

Sea $\mathcal{A}$ un autómata, con $\mathbf{I}$ variables de entrada, $\mathbf{O}$ variables de salida y $\mathbf{S}$ variables de estado; todas las variables son binarias. Decimos, por tanto, que el conjunto de entradas a $\mathcal{A}$ es el conjunto de strings de longitud $\mathbf{I}$, $\mathbb{B}^{\mathbf{I}}$, que el conjunto de salidas de $\mathcal{A}$ es el conjunto de strings de longitud $\mathbf{O}$, $\mathbb{B}^{\mathbf{O}}$, y que el conjunto de estados de $\mathcal{A}$ es el conjunto de strings de longitud $\mathbf{S}$, $\mathbb{B}^{\mathbf{S}}$.

Escribimos $\mathcal{A}_{s\imath no}/2^{\mathbf{P}}$ para indicar la probabilidad de que estando $\mathcal{A}$ en el estado s y recibiendo la entrada $\imath$, pase al estado n y produzca la salida o. Sólo consideraremos valores naturales de $\mathcal{A}_{s\imath no}$ y de $\mathbf{P}$. De modo que $(\mathcal{A}_{s\imath no})$ es un array de cuatro dimensiones y de tamaño $2^{\mathbf{S}} \times 2^{\mathbf{I}} \times 2^{\mathbf{S}} \times 2^{\mathbf{O}}$.

La definición del autómata $\mathcal{A}$ queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \ & \langle \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_{s\imath no}) \rangle \\ & \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathcal{A}_{s\imath no} \in \mathbb{N} \\ & s \hookrightarrow \mathbf{S}, \imath \hookrightarrow \mathbf{I}, n \hookrightarrow \mathbf{S}, o \hookrightarrow \mathbf{O} \\ & \forall s, \imath : \ \textstyle\sum_n \sum_o \mathcal{A}_{s\imath no} = 2^{\mathbf{P}}. \end{aligned}$$

Haciendo $p = s.2^{\mathbf{I}} + \imath$, $q = n.2^{\mathbf{O}} + o$, podemos reducir el número de dimensiones de $(\mathcal{A}_{s\imath no})$ a dos, $(\mathcal{A}_{pq})$, y haciendo $r = s.2^{\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{O}} + \imath.2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}} + n.2^{\mathbf{O}} + o$, incluso a una, $(\mathcal{A}_r)$. Pero debe observarse que $p \hookrightarrow (\mathbf{S}+\mathbf{I})$, que $q \hookrightarrow (\mathbf{S}+\mathbf{O})$ y que $r \hookrightarrow (\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{O})$, de modo que el tamaño del array de cuatro dimensiones $(\mathcal{A}_{s\imath no})$, $2^{\mathbf{S}} \times 2^{\mathbf{I}} \times 2^{\mathbf{S}} \times 2^{\mathbf{O}}$, es el mismo que el tamaño de la matriz $(\mathcal{A}_{pq})$, $2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}} \times 2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}$, y el mismo que el tamaño del string $(\mathcal{A}_r)$, $2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{O}}$.

Ejemplos Sea

$$\mathcal{H} = \left\langle 1, 1, 1, 1; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

la forma matricial $(\mathcal{H}_{pq})$ de cierto autómata $\mathcal{H}$. El 1 que ocupa la séptima posición de la matriz (llevando la cuenta creciendo desde cero pero comenzando desde el final, o sea, el 1 subrayado), corresponde a $\mathcal{H}_{01,11}$ (decimal $\mathcal{H}_{1,3}$), que también es $\mathcal{H}_{0111}$ (decimal $\mathcal{H}_7$) cuando se expresa como string, y también $\mathcal{H}_{0,1,1,1}$ con sus cuatro dimensiones escritas de manera explícita. Por lo tanto el 1 subrayado explica que si el estado actual del autómata $\mathcal{H}$ es 0 y la entrada es 1, entonces la probabilidad de que el próximo estado sea 1 y la salida (actual) sea 1, es 1/2.

Hagamos ahora el ejercicio inverso, es decir, representemos en esta notación un autómata conocido. Empezaremos por uno sencillo, la puerta AND. Para ello lo primero es determinar el número de variables, en este caso dos de entrada y una de salida, $\mathbf{I}_{\mathrm{AND}} = 2$ y $\mathbf{O}_{\mathrm{AND}} = 1$. Es determinístico, $\mathbf{P}_{\mathrm{AND}} = 0$, y no tiene variables de estado, o sea, sólo tiene un estado, $\mathbf{S}_{\mathrm{AND}} = 0$. Si optamos por la representación bidimensional, que es la más sencilla, entonces sabemos que tenemos que rellenar una matriz de cuatro filas por dos columnas, $2^{0+2} \times 2^{0+1}$. O sea, hemos llegado hasta:

$$\mathrm{AND} = \Big\langle 2,1,0,0;\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 11\\ 10\\ 01\\ 00 \end{array} & \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \end{array} \Big\rangle.$$

Los números que rodean a la matriz aún vacía sirven de ayuda para guiar la siguiente fase. Sabemos que si las dos variables de entrada valen 1, entonces la variable de salida toma el valor 1, de modo que donde cruza la fila 11 y la columna 1 escribimos un 1 porque su probabilidad es 1, y donde se encuentra la entrada 11 con la salida 0 escribimos un 0 porque su probabilidad es 0. Igualmente hemos de considerar las otras posibilidades del vector de entrada. La solución final es:

$$\mathrm{AND} = \Big\langle 2,1,0,0;\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle,$$

cuya forma unidimensional es: $\mathrm{AND} = \big\langle 2,1,0,0;(1,0,0,1,0,1,0,1)\big\rangle$.

El siguiente nivel de complejidad aparece cuando se consideran autómatas con variables de estado, o sea, con más de un estado. Pero es una complejidad menor, ya que basta percatarse de que las variables de estado se anteponen tanto a las variables de entrada como a las de salida. Veamos como ejemplo el autómata DEL que representa el retardo elemental, o sea, que si se presenta a su entrada un stream unitario, a la salida aparece el mismo stream, pero un instante más tarde. En este caso la plantilla a rellenar es:

$$\mathrm{DEL} = \Big\langle 1,1,1,0;\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1.1 & 1.0 & 0.1 & 0.0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1.1\\ 1.0\\ 0.1\\ 0.0 \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \Big\rangle,$$

donde antes del punto aparece la variable de estado. La variable de estado sirve para recordar cuál es el valor actual de la variable de entrada, para que esté disponible en el instante siguiente. Al rellenar la matriz tenemos que hacer consideraciones como la que sigue: si el estado actual es 0 y entra un 1, esto significa que la entrada del instante anterior fue 0, de manera que la salida actual debe ser 0, y como ahora entra un 1 el estado debe pasar a valer 1, de modo que la combinación (estado, entrada) 0.1 resulta en el par (estado, salida) 1.0, lo que hace que el cruce de la fila 0.1 con la columna 1.0 se lleve el 1 del suceso seguro, y las otras tres columnas de la misma fila un 0. Recorriendo todas las combinaciones (estado, entrada) completamos la matriz

$$\mathrm{DEL} = \left\langle 1,1,1,0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

o linealmente: $\mathrm{DEL} = \Big\langle 1,1,1,0;(1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1)\Big\rangle$.

A.4.2 La igualdad de autómatas

La *igualdad de autómatas*: diremos que dos autómatas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, son iguales, lo cual notaremos $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, si y sólo si, por definición, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{A}'}$, $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{O}_{\mathcal{A}'}$, $\mathbf{S}_{\mathcal{A}} = \mathbf{S}_{\mathcal{A}'}$ y:

$$\forall r \hookrightarrow (\mathbf{S}_{\mathcal{A}} + \mathbf{I}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{A}} + \mathbf{O}_{\mathcal{A}}) = (\mathbf{S}_{\mathcal{A}'} + \mathbf{I}_{\mathcal{A}'} + \mathbf{S}_{\mathcal{A}'} + \mathbf{O}_{\mathcal{A}'}) : \frac{\mathcal{A}_r}{2^{\mathbf{P}_{\mathcal{A}}}} = \frac{\mathcal{A}'_r}{2^{\mathbf{P}_{\mathcal{A}'}}}.$$

La igualdad es una relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} \forall\, \mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C} : \qquad & \mathcal{A} = \mathcal{A} \\ & \mathcal{A} = \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{A} \\ & (\mathcal{A} = \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} = \mathcal{C}) \Longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{C}\,. \end{aligned}$$

Ejemplo El autómata sin variables, $\varnothing$, es: $\varnothing = \Big\langle 0,0,0,0;(1)\Big\rangle$, o lo que es lo mismo, según la definición vista: $\varnothing = \Big\langle 0,0,0,2;(4)\Big\rangle$.

A.4.3 La forma mínima

Si todos los elementos del array $(\mathcal{A}_r)$ son pares, entonces podemos dividirlos todos ellos entre 2, restar 1 a $\mathbf{P}$, y tenemos otra manera de escribir $\mathcal{A}$. Preferiremos la manera en la que alguno de los elementos del array $(\mathcal{A}_r)$ es impar, forma que llamamos de $\mathbf{P}$ mínimo o, simplemente, *forma mínima*.

A.4.4 Las operaciones

Definimos tres operaciones sobre los autómatas: la composición en serie, escrita $\oplus$; la composición en paralelo, escrita $\otimes$; y la composición de realimentación, escrita $\odot$. Usaremos la notación prefija de las operaciones y de esta manera evitaremos el uso de paréntesis. Para definir las operaciones emplearemos tres autómatas genéricos:

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{I}_\mathcal{A}, \mathbf{O}_\mathcal{A}, \mathbf{S}_\mathcal{A}, \mathbf{P}_\mathcal{A}; (\mathcal{A}_r) \rangle$$
$$\mathcal{B} = \langle \mathbf{I}_\mathcal{B}, \mathbf{O}_\mathcal{B}, \mathbf{S}_\mathcal{B}, \mathbf{P}_\mathcal{B}; (\mathcal{B}_{\dot r}) \rangle$$
$$\mathcal{C} = \langle \mathbf{I}_\mathcal{C}, \mathbf{O}_\mathcal{C}, \mathbf{S}_\mathcal{C}, \mathbf{P}_\mathcal{C}; (\mathcal{C}_{\ddot r}) \rangle \, .$$

Nótese que los índices de $\mathcal{B}$ están bajo un punto, que los índices de $\mathcal{C}$ están bajo dos puntos, y que los índices de $\mathcal{A}$ no están bajo punto alguno.

La composición en serie La *composición en serie*, $\mathcal{A} = \oplus \mathcal{B}\mathcal{C}$, sólo puede ser efectuada si $\mathbf{O}_\mathcal{B} = \mathbf{I}_\mathcal{C}$, en cuyo caso:

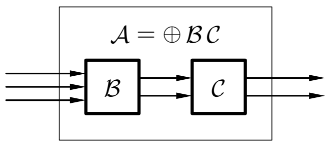
$$\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B}, \quad \mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{C}, \quad \mathbf{S}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B} + \mathbf{S}_\mathcal{C}, \quad \mathbf{P}_\mathcal{A} = \mathbf{P}_\mathcal{B} + \mathbf{P}_\mathcal{C}.$$

Para calcular $(\mathcal{A}_r)$ es más sencilla la forma en cuatro dimensiones, siendo:

$$s = \dot s.2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot s, \quad n = \dot n.2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot n, \quad \imath = \dot\imath, \quad o = \ddot o,$$

y resulta (nótese que $v \hookrightarrow \mathbf{O}_\mathcal{B} = \mathbf{I}_\mathcal{C}$):

$$\mathcal{A}_{s\imath no} = \mathcal{A}_{\dot s 2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot s, \dot\imath, \dot n 2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot n, \ddot o} = \sum_v \mathcal{B}_{\dot s \dot\imath \dot n v} \cdot \mathcal{C}_{\ddot s v \ddot n \ddot o}.$$



Composición en serie

La composición en paralelo La *composición en paralelo*, $\mathcal{A} = \otimes \mathcal{B}\mathcal{C}$, hace que:

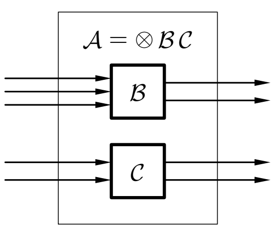
$$\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B} + \mathbf{I}_\mathcal{C}, \quad \mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{B} + \mathbf{O}_\mathcal{C}, \quad \mathbf{S}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B} + \mathbf{S}_\mathcal{C}, \quad \mathbf{P}_\mathcal{A} = \mathbf{P}_\mathcal{B} + \mathbf{P}_\mathcal{C}.$$

Para calcular $(\mathcal{A}_r)$ es más sencillo utilizar la forma en cuatro dimensiones, siendo:

$$s = \dot s.2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot s, \quad n = \dot n.2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot n, \quad \imath = \dot\imath.2^{\mathbf{I}_\mathcal{C}} + \ddot\imath, \quad o = \dot o.2^{\mathbf{O}_\mathcal{C}} + \ddot o,$$

y resulta:

$$\mathcal{A}_{s\imath no} = \mathcal{A}_{\dot s 2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot s, \dot\imath 2^{\mathbf{I}_\mathcal{C}} + \ddot\imath, \dot n 2^{\mathbf{S}_\mathcal{C}} + \ddot n, \dot o 2^{\mathbf{O}_\mathcal{C}} + \ddot o} = \mathcal{B}_{\dot s \dot\imath \dot n \dot o} \cdot \mathcal{C}_{\ddot s \ddot\imath \ddot n \ddot o}.$$



Composición en paralelo

La composición de realimentación La *composición de realimentación*, $\mathcal{A} = \odot\,\mathcal{B}$, solamente puede efectuarse si $\mathbf{I}_\mathcal{B} > 0$, $\mathbf{O}_\mathcal{B} > 0$, y entonces resulta que:

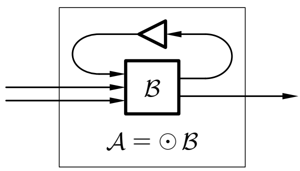
$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{I}_\mathcal{B} - 1, \mathbf{O}_\mathcal{B} - 1, \mathbf{S}_\mathcal{B} + 1, \mathbf{P}_\mathcal{B}; (\mathcal{B}_{\dot r}) \rangle \,,$$

esto es, $\mathbf{I}_\mathcal{A} = \mathbf{I}_\mathcal{B} - 1$, $\mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{O}_\mathcal{B} - 1$, $\mathbf{S}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B} + 1$, $\mathbf{P}_\mathcal{A} = \mathbf{P}_\mathcal{B}$ y $(\mathcal{A}_r) = (\mathcal{B}_{\dot r})$, con $r, \dot r \hookrightarrow \mathbf{S}_\mathcal{A} + \mathbf{I}_\mathcal{A} + \mathbf{S}_\mathcal{A} + \mathbf{O}_\mathcal{A} = \mathbf{S}_\mathcal{B} + \mathbf{I}_\mathcal{B} + \mathbf{S}_\mathcal{B} + \mathbf{O}_\mathcal{B}$.

Obsérvese que r recorre los mismos valores que $\dot r$ pero que sus significados, al ser trasladados a los cuatro índices $(s, \imath, n, o)$, son diferentes. La relación entre los índices de $\mathcal{A}$ y los de $\mathcal{B}$ es:

$$s = \dot s.2 + \breve s, \quad n = \dot n.2 + \breve n, \quad \dot\imath = \breve\imath.2^{\mathbf{I}_\mathcal{A}} + \imath, \quad \dot o = \breve o.2^{\mathbf{O}_\mathcal{A}} + o,$$

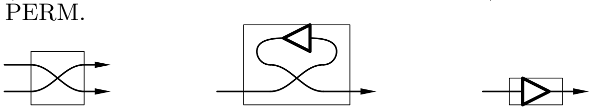
donde $\breve s$, $\breve\imath$, $\breve n$ y $\breve o$ son índices binarios, que toman el valor 1 o el valor 0, es decir, $\breve\jmath \hookrightarrow 1$.



Composición de realimentación

Ejemplos

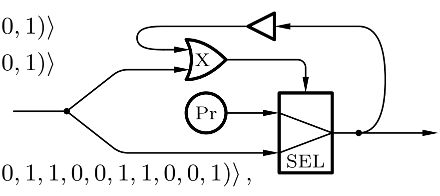
Puesto que PERM $= \Big\langle 2,2,0,0; (1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1) \Big\rangle$ y DEL $= \Big\langle 1,1,1,0; (1,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,1) \Big\rangle$, resulta que DEL $= \odot$ PERM.



PERM $\qquad$ $\odot$ PERM $\qquad$ DEL

Véase que: $\oplus$ FORK $\odot \oplus \oplus \otimes \otimes$ XOR PROB $\mathcal{I}$ SEL FORK, con

FORK $= \langle 1,2,0,0; (1,0,0,0,0,0,0,1) \rangle$
XOR $= \langle 2,1,0,0; (0,1,1,0,1,0,0,1) \rangle$
PROB $= \langle 0,1,0,1; (1,1) \rangle$
$\mathcal{I} = \langle 1,1,0,0; (1,0,0,1) \rangle$
SEL $= \langle 3,1,0,0; (1,0,1,0,0,1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,1) \rangle$,



resulta $\langle 1,1,1,1; (2,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,2) \rangle = \mathcal{H}$, que es el autómata presentado en la página 162.

Abreviaturas Utilizaremos las siguientes abreviaturas:

$$
\begin{aligned}
\otimes^n \mathcal{A} &= \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{n-1} \underbrace{\mathcal{A} \ldots \mathcal{A}}_{n} \quad (\otimes^0 \mathcal{A} = \emptyset) \\
\oplus^n \mathcal{A} &= \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{n-1} \underbrace{\mathcal{A} \ldots \mathcal{A}}_{n} \quad (n > 0) \\
\odot^n \mathcal{A} &= \underbrace{\odot \cdots \odot}_{n} \mathcal{A} \\
\bigotimes_{i=m}^{n} \mathcal{A}_i &= \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{m-n} \mathcal{A}_m \, \mathcal{A}_{m-1} \ldots \mathcal{A}_n \quad (m \geq n).
\end{aligned}
$$

Si $m < n$, entonces $\bigotimes_{i=m}^{n} \mathcal{A}_i = \emptyset$. También: $\bigotimes_{i \hookrightarrow \mathbf{N}} \mathcal{A}_i = \bigotimes_{i=2^{\mathbf{N}}-1}^{0} \mathcal{A}_i$.

A.4.5 La función característica

Llamando *función característica* del autómata $\mathcal{A}$ a:

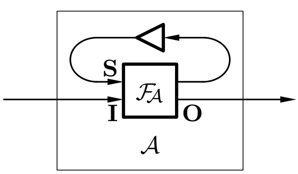
$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \langle \mathbf{S} + \mathbf{I}, \mathbf{S} + \mathbf{O}, 0, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_r) \rangle \,,$$

resulta que:

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_r) \rangle = \odot^{\mathbf{S}} \langle \mathbf{S} + \mathbf{I}, \mathbf{S} + \mathbf{O}, 0, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_r) \rangle = \odot^{\mathbf{S}} \mathcal{F}_{\mathcal{A}},$$

o sea:

$$\forall \mathcal{A} : \ \mathcal{A} = \odot^{\mathbf{S}} \mathcal{F}_{\mathcal{A}} \,.$$



Función característica

A.4.6 La propiedad asociativa

La composición en serie tiene la propiedad asociativa:

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} :\ (\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}) \wedge (\mathbf{O}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}) \Longrightarrow \oplus \oplus \mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C} = \oplus\, \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}\,\mathcal{C}\,.$$

Demostración Es inmediato que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\oplus\oplus\mathcal{ABC}} &= \mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{BC}} \\
\mathbf{O}_{\oplus\oplus\mathcal{ABC}} &= \mathbf{O}_{\mathcal{C}} = \mathbf{O}_{\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{BC}} \\
\mathbf{S}_{\oplus\oplus\mathcal{ABC}} &= \mathbf{S}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + \mathbf{S}_{\mathcal{C}} = \mathbf{S}_{\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{BC}} \\
\mathbf{P}_{\oplus\oplus\mathcal{ABC}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{A}} + \mathbf{P}_{\mathcal{B}} + \mathbf{P}_{\mathcal{C}} = \mathbf{P}_{\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{BC}}.
\end{aligned}$$

Además (con $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{B}}$ y $\mathbf{O}_{\mathcal{B}} = \mathbf{I}_{\mathcal{C}}$):

$$\begin{aligned}
[\oplus \oplus \mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}]_{\acute{s}\acute{\imath}\acute{n}\acute{o}} &= \sum_{v \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{B}}} \left(\sum_{v' \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}_{s\imath n v'} \cdot \mathcal{B}_{\dot{s}v'\dot{n}v} \right) \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}v\ddot{n}\ddot{o}} = \\
&= \sum_{v \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{B}}} \sum_{v' \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}_{s\imath n v'} \cdot \mathcal{B}_{\dot{s}v'\dot{n}v} \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}v\ddot{n}\ddot{o}} = \\
&= \sum_{v' \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{A}}} \sum_{v \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{A}_{s\imath n v'} \cdot \mathcal{B}_{\dot{s}v'\dot{n}v} \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}v\ddot{n}\ddot{o}} = \\
&= \sum_{v' \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}_{s\imath n v'} \cdot \left(\sum_{v \hookrightarrow \mathbf{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}_{\dot{s}v'\dot{n}v} \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}v\ddot{n}\ddot{o}} \right) = \\
&= [\oplus\, \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}\,\mathcal{C}]_{\acute{s}\acute{\imath}\acute{n}\acute{o}}\,.
\end{aligned}$$

La composición en paralelo tiene la propiedad asociativa:

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} :\ \otimes \otimes \mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C} = \otimes\, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\,\mathcal{C}\,.$$

Demostración Es inmediato que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{\otimes\otimes\mathcal{ABC}} &= \mathbf{I}_{\mathcal{A}} + \mathbf{I}_{\mathcal{B}} + \mathbf{I}_{\mathcal{C}} = \mathbf{I}_{\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{BC}} \\
\mathbf{O}_{\otimes\otimes\mathcal{ABC}} &= \mathbf{O}_{\mathcal{A}} + \mathbf{O}_{\mathcal{B}} + \mathbf{O}_{\mathcal{C}} = \mathbf{O}_{\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{BC}} \\
\mathbf{S}_{\otimes\otimes\mathcal{ABC}} &= \mathbf{S}_{\mathcal{A}} + \mathbf{S}_{\mathcal{B}} + \mathbf{S}_{\mathcal{C}} = \mathbf{S}_{\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{BC}} \\
\mathbf{P}_{\otimes\otimes\mathcal{ABC}} &= \mathbf{P}_{\mathcal{A}} + \mathbf{P}_{\mathcal{B}} + \mathbf{P}_{\mathcal{C}} = \mathbf{P}_{\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{BC}}.
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
[\otimes \otimes \mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{C}]_{\acute{s}\acute{\imath}\acute{n}\acute{o}} &= (\mathcal{A}_{s\imath n o} \cdot \mathcal{B}_{\dot{s}\dot{\imath}\dot{n}\dot{o}}) \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}\ddot{\imath}\ddot{n}\ddot{o}} = \mathcal{A}_{s\imath n o} \cdot (\mathcal{B}_{\dot{s}\dot{\imath}\dot{n}\dot{o}} \cdot \mathcal{C}_{\ddot{s}\ddot{\imath}\ddot{n}\ddot{o}}) = \\
&= [\otimes\, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\,\mathcal{C}]_{\acute{s}\acute{\imath}\acute{n}\acute{o}}\,.
\end{aligned}$$

A.4.7 Los elementos neutros

La composición en paralelo tiene elemento neutro, es $\emptyset$, definido:

$$\emptyset = \langle 0, 0, 0, 0; (1) \rangle \,.$$

Se cumple que, $\forall \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \otimes\, \emptyset\, \mathcal{A} \\ \mathcal{A} &= \otimes\, \mathcal{A}\, \emptyset \\ \mathcal{A} &= \otimes \otimes\, \emptyset\, \mathcal{A}\, \emptyset \,. \end{aligned}$$

La demostración es inmediata.

La composición en serie tiene elemento neutro, es $\mathcal{I}_n$, definido:

$$\begin{cases} \mathcal{I}_0 \;=\; \emptyset \;=\; \langle 0, 0, 0, 0; (1) \rangle \\ \mathcal{I}_1 \;=\; \mathcal{I} \;=\; \langle 1, 1, 0, 0; (1, 0, 0, 1) \rangle \\ \mathcal{I}_n \qquad\;\; = \otimes\, \mathcal{I}_{n-1}\, \mathcal{I} \;\text{ si }\; n \geq 2. \end{cases}$$

Se cumple que, $\forall \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \oplus\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}}\, \mathcal{A} \\ \mathcal{A} &= \oplus\, \mathcal{A}\, \mathcal{I}_{\mathbf{O}} \\ \mathcal{A} &= \oplus \oplus\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}}\, \mathcal{A}\, \mathcal{I}_{\mathbf{O}} \,. \end{aligned}$$

La demostración es sencilla una vez se reconoce en $\mathcal{I}_n$ la forma de la matriz identidad de tamaño $2^n \times 2^n$:

$$\mathcal{I}_n = \left\langle n, n, 0, 0; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

A.4.8 Notación automática de vectores

Si un autómata sólo tiene variables de salida, o sea, no tiene ni vector de entrada ni vector de estado, entonces sólo tiene el vector de salida. Confundiendo un autómata de estas características con el único vector que tiene, podemos abusar de la notación que describe autómatas para escribir vectores. Queda:

$$\mathcal{V} = \langle \mathbf{N}, \mathbf{P}; (\mathcal{V}_r) \rangle = \langle 0, \mathbf{N}, 0, \mathbf{P}; (\mathcal{V}_r) \rangle \, .$$

A.4.9 Notación automática de strings

Si en §A.2.4 escribimos un string utilizando el aparato descriptivo necesario a los vectores, ahora podemos describir un string al modo de un autómata.

Sea $S = [b_{\ell-1}\, b_{\ell-2} \, \ldots \, b_2\, b_1\, b_0]$ el string notado $S = \langle \ell, 0; (S_r) \rangle$ con $S_{\overline{S}} = 1$ y $S_{r \neq \overline{S}} = 0$ en §A.2.4. Su forma automática será:

$$S = \langle 0, \ell, 0, 0; (S_r) \rangle = \bigotimes_{i=\ell-1}^{0} \mathrm{K}_{b_i}$$

donde esta última igualdad se sostiene porque:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_1 &= \mathrm{K1} = \langle 0, 1, 0, 0; (1, 0) \rangle \\ \mathrm{K}_0 &= \mathrm{K0} = \langle 0, 1, 0, 0; (0, 1) \rangle \, . \end{aligned}$$

A.4.10 La ampliabilidad

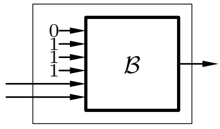
Siendo S el string de longitud ℓ al que corresponde el índice $\overline{S}$, definimos

$$\mathrm{Syntax}(\overline{S}, \ell, \mathcal{B}) = \oplus \otimes \bigotimes_{i=\ell-1}^{0} \mathrm{K}_{b_i}\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}_{\mathcal{B}}-\ell}\, \mathcal{B} \, .$$

O, abreviadamente, usando la notación automática del string:

$$\mathrm{Syntax}(S, \mathcal{B}) = \oplus \otimes S\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}_{\mathcal{B}}-\ell}\, \mathcal{B} \, .$$

Por ejemplo y suponiendo que $\mathbf{I}_{\mathcal{B}} = 6$, $\mathrm{Syntax}([0\,1\,1\,1], \mathcal{B})$ puede representarse así.



Syntax(7,4,$\mathcal{B}$)

Decimos que el autómata $\mathcal{B}$ es una *ampliación* del autómata $\mathcal{A}$, notado $\mathcal{B} \triangleright \mathcal{A}$, cuando:

$$\mathcal{B} \triangleright \mathcal{A} \iff \big(\mathbf{I}_\mathcal{B} > \mathbf{I}_\mathcal{A}\big) \land \big(\exists c : \mathrm{Syntax}(c, \mathbf{I}_\mathcal{B} - \mathbf{I}_\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A}\big).$$

Por ejemplo, el autómata XOR $= \langle 2,1,0,0; (0,1,1,0,1,0,0,1)\rangle$ es una ampliación del autómata NOT, XOR $\triangleright$ NOT, y también del autómata $\mathcal{I}$, XOR $\triangleright \mathcal{I}$, ya que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Syntax}(1,1,\mathrm{XOR}) = \oplus \otimes \mathrm{K1}\, \mathcal{I}\, \mathrm{XOR} = \mathrm{NOT},\\
&\mathrm{Syntax}(0,1,\mathrm{XOR}) = \oplus \otimes \mathrm{K0}\, \mathcal{I}\, \mathrm{XOR} = \mathcal{I}\,.
\end{aligned}$$

A.4.11 La construcción

Minimum Cualquier autómata puede ser escrito como una expresión en la que sólo aparecen las tres composiciones (en serie, en paralelo y de realimentación) y cuatro autómatas, concretamente SINK, FORK, PROB y NAND. Llamaremos conjunto Minimum al constituido por estos cuatro autómatas, que presentamos en forma de string ($\mathcal{A}_r$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Minimum} &= \{\, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NAND} \,\}\\
\mathrm{SINK} &= \langle 1,0,0,0; (1,1)\rangle\\
\mathrm{FORK} &= \langle 1,2,0,0; (1,0,0,0,0,0,0,1)\rangle\\
\mathrm{PROB} &= \langle 0,1,0,1; (1,1)\rangle\\
\mathrm{NAND} &= \langle 2,1,0,0; (0,1,1,0,1,0,1,0)\rangle\,.
\end{aligned}$$

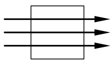
Fundamentales Componiendo estos cuatro autómatas definimos otros que nos servirán para construir cualquier autómata.

$$\begin{aligned}
\varnothing &= \oplus\, \mathrm{PROB}\, \mathrm{SINK}\\
\mathrm{NOT} &= \oplus\, \mathrm{FORK}\, \mathrm{NAND}\\
\mathcal{I} &= \oplus\, \mathrm{NOT}\, \mathrm{NOT}\\
\mathrm{AND} &= \oplus\, \mathrm{NAND}\, \mathrm{NOT}\\
\mathrm{OR} &= \oplus \otimes \mathrm{NOT}\, \mathrm{NOT}\, \mathrm{NAND}\\
\mathrm{K1} &= \oplus \oplus \oplus\, \mathrm{PROB}\, \mathrm{FORK} \otimes \mathrm{NOT}\, \mathcal{I}\, \mathrm{NAND}\\
\mathrm{K0} &= \oplus\, \mathrm{K1}\, \mathrm{NOT}\\
\mathrm{XOR} &= \oplus \oplus \oplus \otimes \mathrm{FORK}\, \mathrm{FORK} \otimes \otimes\, \mathcal{I} \oplus \mathrm{NAND}\, \mathrm{FORK}\, \mathcal{I}\\
&\quad \otimes \mathrm{NAND}\, \mathrm{NAND}\, \mathrm{NAND}\\
\mathrm{PERM} &= \oplus \oplus \otimes\, \mathrm{FORK}\, \mathrm{FORK} \otimes \otimes\, \mathcal{I} \oplus \mathrm{XOR}\, \mathrm{FORK}\, \mathcal{I} \otimes \mathrm{XOR}\, \mathrm{XOR}\\
\mathrm{SEL} &= \oplus \oplus \otimes \oplus\, \mathrm{PERM} \otimes \mathcal{I}\, \mathrm{FORK}\, \mathcal{I}\\
&\quad \otimes \mathrm{NAND} \oplus \otimes\, \mathrm{NOT}\, \mathcal{I}\, \mathrm{NAND}\, \mathrm{NAND}
\end{aligned}$$

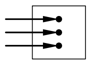
Funciones También necesitamos algunas funciones de números naturales ($m, n \in \mathbb{N}$) en autómatas, todos ellos con $\mathbf{S} = 0$ y $\mathbf{P} = 0$.

$$\mathrm{OR}_n = \begin{cases} \oplus \otimes \mathrm{OR}_{n-1}\, \mathcal{I}\, \mathrm{OR} & \text{si } n > 2 \\ \mathrm{OR} & \text{si } n = 2 \\ \mathcal{I} & \text{si } n = 1 \\ \mathrm{K0} & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = 1 \end{bmatrix}$$

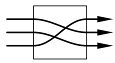
$$\mathrm{K}_n = \begin{cases} \mathrm{K1} & \text{si } n > 0 \\ \mathrm{K0} & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = 0 \\ \mathbf{O} = 1 \end{bmatrix}$$



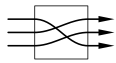
$\mathcal{I}_3$



SINK_3



Csr_3



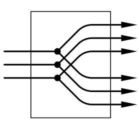
Csl_3

$$\mathcal{I}_n = \begin{cases} \otimes \mathcal{I}_{n-1}\, \mathcal{I} & \text{si } n > 1 \\ \mathcal{I} & \text{si } n = 1 \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = n \end{bmatrix}$$

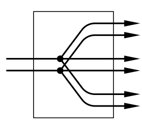
$$\mathrm{SINK}_n = \begin{cases} \otimes \mathrm{SINK}_{n-1}\, \mathrm{SINK} & \text{si } n > 1 \\ \mathrm{SINK} & \text{si } n = 1 \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Csr}_n = \begin{cases} \oplus \otimes \mathcal{I}\, \mathrm{Csr}_{n-1} \otimes \mathrm{PERM}\, \mathcal{I}_{n-2} & \text{si } n > 2 \\ \mathrm{PERM} & \text{si } n = 2 \\ \mathcal{I} & \text{si } n = 1 \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = n \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Csl}_n = \begin{cases} \oplus \otimes \mathrm{Csl}_{n-1}\, \mathcal{I} \otimes \mathcal{I}_{n-2}\, \mathrm{PERM} & \text{si } n > 2 \\ \mathrm{PERM} & \text{si } n = 2 \\ \mathcal{I} & \text{si } n = 1 \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = n \end{bmatrix}$$



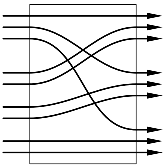
FORK_3



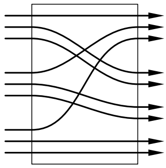
$\mathrm{Mult}_{3,2}$

$$\mathrm{FORK}_n = \begin{cases} \oplus \otimes \mathrm{FORK}_{n-1}\, \mathrm{FORK} \otimes \otimes \mathcal{I}_{n-1}\, \mathrm{Csr}_n\, \mathcal{I} & \text{si } n > 1 \\ \mathrm{FORK} & \text{si } n = 1 \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = 2n \end{bmatrix}$$

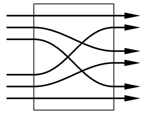
$$\mathrm{Mult}_{m,n} = \begin{cases} \oplus \mathrm{Mult}_{m-1,n} \otimes \mathrm{FORK}_n\, \mathcal{I}_{(m-2)n} & \text{si } (m > 2) \wedge (n > 0) \\ \mathrm{FORK}_n & \text{si } (m = 2) \wedge (n > 0) \\ \mathcal{I}_n & \text{si } (m = 1) \wedge (n > 0) \\ \mathrm{SINK}_n & \text{si } (m = 0) \wedge (n > 0) \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = n \\ \mathbf{O} = mn \end{bmatrix}$$



$\mathrm{Join}_{3,3}$



$\mathrm{Disjoin}_{3,3}$



$\mathrm{Rea}_{2,3}$

$$\mathrm{Join}_{m,n} = \begin{cases} \oplus\otimes\otimes\,\mathcal{I}_{m-1}\,\mathrm{Csl}_{(m-1)(n-1)+1}\,\mathcal{I}_{n-1}\otimes\mathrm{Join}_{m-1,n}\,\mathcal{I}_n & \\ & \text{si } (m>2)\wedge(n>1) \\ \otimes\otimes\,\mathcal{I}\,\mathrm{Csl}_n\,\mathcal{I}_{n-1} & \text{si } (m=2)\wedge(n>1) \\ \mathcal{I}_n & \text{si } (m=1)\wedge(n>0) \\ \mathcal{I}_m & \text{si } (m>0)\wedge(n=1) \\ \emptyset & \text{si } (m=0)\vee(n=0) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = mn \\ \mathbf{O} = mn \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Disjoin}_{m,n} = \begin{cases} \oplus\otimes\,\mathrm{Disjoin}_{m-1,n}\,\mathcal{I}_n\otimes\otimes\,\mathcal{I}_{m-1}\,\mathrm{Csr}_{(m-1)(n-1)+1}\,\mathcal{I}_{n-1} & \\ & \text{si } (m>2)\wedge(n>1) \\ \otimes\otimes\,\mathcal{I}\,\mathrm{Csr}_n\,\mathcal{I}_{n-1} & \text{si } (m=2)\wedge(n>1) \\ \mathcal{I}_n & \text{si } (m=1)\wedge(n>0) \\ \mathcal{I}_m & \text{si } (m>0)\wedge(n=1) \\ \emptyset & \text{si } (m=0)\vee(n=0) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = mn \\ \mathbf{O} = mn \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Rea}_{m,n} = \begin{cases} \oplus\,\mathrm{Disjoin}_{m,n}\otimes\mathcal{I}_m\,\mathrm{Rea}_{m,n-1} & \text{si } (m>0)\wedge(n>2) \\ \mathrm{Disjoin}_{m,2} & \text{si } (m>0)\wedge(n=2) \\ \mathcal{I}_m & \text{si } (m>0)\wedge(n=1) \\ \emptyset & \text{si } (m=0)\vee(n=0) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = mn \\ \mathbf{O} = nm \end{array}\right.$$

$$\mathrm{SEL}_n = \begin{cases} \oplus\oplus\otimes\,\mathrm{Mult}_{n,1}\,\mathrm{Rea}_{2,n}\,\mathrm{Join}_{n,3}\otimes^n\mathrm{SEL} & \text{si } n>1 \\ \mathrm{SEL} & \text{si } n=1 \\ \mathrm{SINK} & \text{si } n=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = 1+2n \\ \mathbf{O} = n \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Cand}_n = \begin{cases} \oplus\oplus\otimes\,\mathrm{Mult}_{n,1}\,\mathcal{I}_n\,\mathrm{Rea}_{2,n}\otimes^n\mathrm{AND} & \text{si } n>1 \\ \mathrm{AND} & \text{si } n=1 \\ \mathrm{SINK} & \text{si } n=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = 1+n \\ \mathbf{O} = n \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Coder}_n = \begin{cases} \oplus\oplus\oplus\otimes\,\mathrm{FORK}_{2^{n-1}}\,\mathcal{I}_{2^{n-1}}\otimes\otimes\,\mathrm{OR}_{2^{n-1}}\,\mathrm{Coder}_{n-1}\,\mathrm{Coder}_{n-1} & \\ \quad\otimes\,\mathrm{FORK}\,\mathcal{I}_{2n-2}\otimes\mathcal{I}\,\mathrm{SEL}_{n-1} & \text{si } n>1 \\ \otimes\,\mathcal{I}\,\mathrm{SINK} & \text{si } n=1 \\ \mathrm{SINK} & \text{si } n=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = 2^n \\ \mathbf{O} = n \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Switch}_n = \begin{cases} \oplus\oplus\,\mathrm{FORK}_{2n+1}\otimes\mathrm{NOT}\,\mathcal{I}_{4n+1} & \\ \quad\otimes\,\mathrm{SEL}_n\,\mathrm{SEL}_n & \text{si } n>0 \\ \mathrm{SINK} & \text{si } n=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = 1+2n \\ \mathbf{O} = 2n \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Decoder}_n = \begin{cases} \oplus\otimes\otimes\,\mathcal{I}\otimes^{2^{n-1}}\mathrm{K0}\,\mathrm{Decoder}_{n-1} & \\ \quad\mathrm{Switch}_{2^{n-1}} & \text{si } n>1 \\ \oplus\,\mathrm{FORK}\otimes\mathcal{I}\,\mathrm{NOT} & \text{si } n=1 \\ \mathrm{K1} & \text{si } n=0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{I}\ = n \\ \mathbf{O} = 2^n \end{array}\right.$$

La forma canónica Por fin la expresión $\mathrm{Canon}_{\mathcal{A}}$, definida a partir de la forma unidimensional de $\mathcal{A} = \left\langle \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_r) \right\rangle$, que es importante porque puede desarrollarse hasta que sólo aparezcan las siete palabras {⊕, ⊗, ⊙, SINK, FORK, PROB, NAND}, y porque, $\forall \mathcal{A}$, $\mathrm{Canon}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Canon}_{\mathcal{A}} = \odot^{\mathbf{S}} \oplus \oplus \oplus \oplus \oplus\, & \mathrm{Decoder}_{\mathbf{S}+\mathbf{I}} \\ & \mathrm{Shape}_{\mathcal{A}} \\ & \otimes^{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}} \mathrm{Cand}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}} \\ & \mathrm{Rea}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}, 2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}} \\ & \otimes^{2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}} \mathrm{OR}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}} \\ & \mathrm{Coder}_{\mathbf{S}+\mathbf{O}} \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Shape}_{\mathcal{A}}$,
con $\mathbf{I}_{\mathrm{Shape}} = 2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}$, $\mathbf{O}_{\mathrm{Shape}} = 2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}.(1+2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}})$, $\mathbf{S}_{\mathrm{Shape}} = 0$, $\mathbf{P}_{\mathrm{Shape}} = \mathbf{P}$, es:

$$\mathrm{Shape}_{\mathcal{A}} = \begin{cases} \oplus \otimes \mathcal{I}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}} \oplus \oplus \oplus \otimes^{\mathbf{P}} \mathrm{PROB}\, \mathrm{Decoder}_{\mathbf{P}}\, \mathrm{Mult}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}, 2^{\mathbf{P}}} & \\ \qquad \bigotimes_{r \hookrightarrow (\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{O})} \mathrm{OR}_{\mathcal{A}_r}\, \mathrm{Join}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}, 1+2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}} & \text{si } \mathbf{P} > 0 \\ \oplus \otimes \mathcal{I}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}} \bigotimes_{r \hookrightarrow (\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{S}+\mathbf{O})} \mathrm{K}_{\mathcal{A}_r}\, \mathrm{Join}_{2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}, 1+2^{\mathbf{S}+\mathbf{O}}} & \text{si } \mathbf{P} = 0. \end{cases}$$

Decimos que $\mathrm{Canon}_{\mathcal{A}}$ es una *forma canónica* de expresar el autómata $\mathcal{A}$. Para expresar que cualquier autómata $\mathcal{A}$ puede ser escrito utilizando, únicamente, las siete palabras, escribiremos:

$$\{\mathcal{A}\} = \Re(\oplus, \otimes, \odot, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NAND}).$$

Comentarios Los autómatas que pertenecen al conjunto Minimum son independientes, es decir, no es posible construir uno de ellos por composición de los otros tres. Son, pues, una base del álgebra automática.

Pero el conjunto Minimum no es el único capaz de generar cualquier autómata. Otros conjuntos de estas características son:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Minimum}_1 = \{\, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NOR} = \oplus\, \mathrm{OR}\, \mathrm{NOT} \,\} \\ & \mathrm{Minimum}_2 = \{\, \mathrm{SINK}, \mathcal{I}, \otimes^n \mathrm{PROB}, \otimes\, \mathrm{FORK}\, \mathrm{NAND} \,\} \ \ \forall n > 0. \end{aligned}$$

Sólo he encontrado bases de cuatro miembros.

A.4.12 La probabilidad binaria

Si se define la *probabilidad binaria* como aquella probabilidad que describe la ocurrencia de cualquiera de las combinaciones booleanas de los eventos generados por n dispositivos binarios de máxima entropía, entonces las probabilidades manejadas por el álgebra automática son probabilidades binarias y sus autómatas son doblemente binarios.

A.4.13 Otra construcción

Otra forma También se pueden escribir autómatas rellenando el array, en vez de con probabilidades, con los valores de estado y de salida. Por ejemplo:

$$\mathrm{AND} = \left\langle 2, 1, 0, 0; \begin{bmatrix} [1] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix} \right\rangle$$

donde en cada fila hay un solo string porque $2^{\mathbf{P}_{\mathrm{AND}}} = 1$ y cada string sólo tiene un bit porque $\mathbf{S}_{\mathrm{AND}} + \mathbf{O}_{\mathrm{AND}} = 1$.

Otro ejemplo es:

$$\mathcal{H} = \left\langle 1, 1, 1, 1; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle 1, 1, 1, 1; \begin{bmatrix} [1\,1] & [1\,1] \\ [1\,1] & [0\,0] \\ [1\,1] & [0\,0] \\ [0\,0] & [0\,0] \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Notaremos $[\mathcal{A}^*_{pu}]$ la matriz de esta forma de representar autómatas. Luego, si $\mathcal{A}_{pq} = n$, entonces en la fila $\mathcal{A}^*_p$ aparecerá n veces el string correspondiente al índice q. Es decir, $u \hookrightarrow \mathbf{P}$ y $\mathcal{A}^*_{pu}$ es un string de tamaño $\mathbf{S} + \mathbf{O}$. Ambas notaciones contienen la misma información.

Linealizando $[\mathcal{A}^*_{pu}]$ y empalmando los $2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}}.2^{\mathbf{P}}$ strings que resultan, obtenemos un string binario $[\mathcal{A}^*_z]$ de longitud $\mathbf{L} = (\mathbf{S} + \mathbf{O}).2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{P}}$. Por ejemplo, la forma linealizada de AND es: $\mathrm{AND} = \left\langle 2, 1, 0, 0; [1\,0\,0\,0] \right\rangle$.

La construcción Usando esta manera de representar autómatas, cuya forma linealizada es $\mathcal{A} = \left\langle \mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{S}, \mathbf{P}; [\mathcal{A}^*_z] \right\rangle$, podemos utilizar la construcción más sencilla Kanon, que puede ser desarrollada hasta que sólo aparezcan las mismas siete palabras y tal que, $\forall \mathcal{A}$, $\mathrm{Kanon}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$:

$$\mathrm{Kanon}_{\mathcal{A}} = \oplus \otimes \bigotimes_{z=\mathbf{L}-1}^{0} \mathrm{K}_{\mathcal{A}^*_z}\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}}\, \mathrm{Universal}_{\mathbf{I},\mathbf{O},\mathbf{S},\mathbf{P}}$$

donde $\mathbf{L} = (\mathbf{S} + \mathbf{O}).2^{\mathbf{S}+\mathbf{I}+\mathbf{P}}$.
O de manera más compacta, usando la notación automática del string $[\mathcal{A}^*_z]$:

$$\mathrm{Kanon}_{\mathcal{A}} = \oplus \otimes [\mathcal{A}^*_z]\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}}\, \mathrm{Universal}_{\mathbf{I},\mathbf{O},\mathbf{S},\mathbf{P}}\,.$$

Universal Usa un autómata universal:

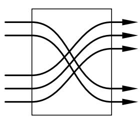
$$\text{Universal}_{i,o,s,p} = \begin{cases} \oplus\, \text{Cross}_{(s+o)2^{s+i+p},i} \odot^s \oplus \otimes \otimes^p \text{PROB} & \\ \qquad \text{Selector}_{s+i,(s+o)2^p}\, \text{Selector}_{p,s+o} & \text{si } p > 0 \\ \oplus\, \text{Cross}_{(s+o)2^{s+i},i} \odot^s \text{Selector}_{s+i,s+o} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

El autómata $\text{Universal}_{i,o,s,p}$ (con $\mathbf{I} = (s+o).2^{s+i+p} + i$, $\mathbf{O} = o$, $\mathbf{S} = s$ y $\mathbf{P} = p$) es un *autómata universal*, y de aquí su nombre, porque es una ampliación de cualquier autómata $\mathcal{A}$ con $\mathbf{I}_\mathcal{A} = i$, $\mathbf{O}_\mathcal{A} = o$, $\mathbf{S}_\mathcal{A} = s$ y $\mathbf{P}_\mathcal{A} = p$.

Funciones Y también usa dos funciones adicionales.

$$\text{Cross}_{m,n} = \begin{cases} \oplus \otimes \text{Cross}_{m,n-1}\, \mathcal{I} \otimes \mathcal{I}_{n-1}\, \text{Csr}_{m+1} & \\ \qquad\qquad \text{si } (m > 0) \wedge (n > 1) & \\ \text{Csr}_{m+1} \quad \text{si } (m > 0) \wedge (n = 1) & \\ \mathcal{I}_m \quad \text{si } (m > 0) \wedge (n = 0) & \\ \mathcal{I}_n \quad \text{si } m = 0 & \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = m+n \\ \mathbf{O} = n+m \end{bmatrix}$$

$$\text{Selector}_{m,n} = \begin{cases} \oplus \oplus \otimes \text{Csl}_m\, \mathcal{I}_{n2^m} \otimes \mathcal{I}_{m-1}\, \text{SEL}_{n2^{m-1}}\, \text{Selector}_{m-1,n} & \\ \qquad\qquad \text{si } (m > 1) \wedge (n > 0) & \\ \text{SEL}_n \quad \text{si } (m = 1) \wedge (n > 0) & \\ \mathcal{I}_n \quad \text{si } (m = 0) \wedge (n > 0) & \\ \text{SINK}_m \quad \text{si } n = 0 & \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} = m+n2^m \\ \mathbf{O} = n \end{bmatrix}$$



$\text{Cross}_{2,3}$

A.5 La dinámica

A.5.1 La ecuación dinámica

Si denotamos $\mathcal{S}_s/2^{\mathbf{P}_\mathcal{S}}$, con $\mathcal{S}_s, \mathbf{P}_\mathcal{S} \in \mathbb{N}$, la probabilidad de que el estado actual de $\mathcal{A}$ sea s, de modo que $s \hookrightarrow \mathbf{S}$, entonces podemos representar el vector de estado de $\mathcal{A}$ a la manera probabilística: $\mathcal{S} = \langle \mathbf{S}, \mathbf{P}_\mathcal{S}; (\mathcal{S}_s) \rangle$.

Si denotamos $\mathcal{J}_\imath/2^{\mathbf{P}_\mathcal{J}}$, con $\mathcal{J}_\imath, \mathbf{P}_\mathcal{J} \in \mathbb{N}$, la probabilidad de que la entrada actual a $\mathcal{A}$ sea $\imath$, de modo que $\imath \hookrightarrow \mathbf{I}$, entonces podemos representar el vector de entrada a $\mathcal{A}$ a la manera probabilística: $\mathcal{J} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{P}_\mathcal{J}; (\mathcal{J}_\imath) \rangle$.

Si las variables del vector de estado actual son probabilísticamente independientes de las variables del vector de entrada, entonces

$$\frac{\mathcal{S}_s}{2^{\mathbf{P}_\mathcal{S}}} \cdot \frac{\mathcal{J}_\imath}{2^{\mathbf{P}_\mathcal{J}}} = \frac{\mathcal{P}_{s\imath}}{2^{\mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}}}$$

es la probabilidad de que el estado actual de $\mathcal{A}$ sea s y que la entrada actual a $\mathcal{A}$ sea $\imath$. Linealizando la matriz $(\mathcal{P}_{s\imath})$, para lo que hacemos $p = s.2^\mathbf{I} + \imath$, obtenemos el vector de estado+entrada

$$\mathcal{P} = \langle \mathbf{S}+\mathbf{I}, \mathbf{P}_\mathcal{S} + \mathbf{P}_\mathcal{J}; (\mathcal{P}_p) \rangle \,.$$

Nótese que, usando la descripción automática de vectores, podemos resumir los cálculos anteriores así:

$$\mathcal{P} = \otimes \mathcal{S}\, \mathcal{J}\,.$$

Puesto que las probabilidades que definen al autómata $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{pq}/2^{\mathbf{P}}$, son probabilidades de los valores de estado siguiente y de salida actual condicionadas a los valores de $\mathcal{P}$, dadas estas probabilidades podemos calcular aquéllas. En concreto,

$$\sum_p \frac{\mathcal{P}_p}{2^{\mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{pq}}{2^{\mathbf{P}}} = \frac{\mathcal{Q}_q}{2^{\mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}+\mathbf{P}}}$$

es la probabilidad de que el vector estado-siguiente+salida $\mathcal{Q}$ tome el valor correspondiente al índice $q = n.2^{\mathbf{O}} + o$. Es decir, $\mathcal{Q}_q = \sum_p \mathcal{P}_p \cdot \mathcal{A}_{pq}$ y

$$\mathcal{Q} = \left\langle \mathbf{S}+\mathbf{O}, \mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}+\mathbf{P}; (\textstyle\sum_p \mathcal{P}_p \cdot \mathcal{A}_{pq})\right\rangle.$$

Estos cálculos pueden resumirse usando, de nuevo, la descripción automática de vectores, para obtener la *ecuación dinámica*:

$$\mathcal{Q} = \oplus \mathcal{P}\, \mathcal{F}_\mathcal{A} = \oplus \otimes \mathcal{S}\, \mathcal{J}\, \mathcal{F}_\mathcal{A}$$

donde $\mathcal{F}_\mathcal{A}$ es la función característica de $\mathcal{A}$ (véase la §A.4.5).

A partir de este resultado es también posible describir separada y probabilísticamente los vectores de estado siguiente $\mathcal{N}$ y de salida $\mathcal{O}$. Usando $\mathcal{Q}_{no}$, $\mathcal{Q}_{no} = \sum_s \sum_\imath \mathcal{P}_{s\imath} \cdot \mathcal{A}_{s\imath no}$, que es la forma matricial de $\mathcal{Q}_q$, queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \left\langle \mathbf{S}, \mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}+\mathbf{P}; (\textstyle\sum_o \mathcal{Q}_{no})\right\rangle \\ \mathcal{O} &= \left\langle \mathbf{O}, \mathbf{P}_\mathcal{S}+\mathbf{P}_\mathcal{J}+\mathbf{P}; (\textstyle\sum_n \mathcal{Q}_{no})\right\rangle. \end{aligned}$$

Es decir, hemos proyectado la matriz $(\mathcal{Q}_{no})$ en dos partes. Debe tenerse presente que, en general, las variables del vector de estado siguiente no serán probabilísticamente independientes de las variables del vector de salida.

Ejemplo Sea el autómata $\mathcal{H}$ del ejemplo que tenía un 1 subrayado (en la página 162), y sea el string de estado+entrada $\mathcal{P}^{\mathcal{H}} = \langle 2, 0; (0, 1, 0, 0)\rangle$, que significa que es seguro que el autómata está en el estado 1 y que la variable de entrada vale 0. Calculamos $\mathcal{Q}^{\mathcal{H}}$ de acuerdo a la ecuación dinámica y obtenemos $\langle 2, 1; (1, 0, 0, 1)\rangle$. Esto significa que es tan probable que el estado siguiente sea 1 y la salida actual 1 como que el estado siguiente sea 0 y la salida actual 0. Nótese que la probabilidad de que el estado siguiente sea 1 es 1/2 y que la probabilidad de que la salida valga 0 es también 1/2, pero que es imposible que el estado siguiente sea diferente de la salida.

A.5.2 La dinámica determinada

La ecuación dinámica es determinística, ya que el vector $\mathcal{Q}$ queda completamente determinado por $\mathcal{S}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, aunque describe un proceso probabilístico. El autómata, aun siendo probabilístico, usa valores determinados de las variables; concretamente y por ser binario, las variables toman, en todo instante, el valor 1 o el valor 0.

Mientras que al partir un vector descrito probabilísticamente se perderá información si las variables que quedan en las distintas partes no son probabilísticamente independientes, se puede partir el string que toma como valor un vector sin pérdida alguna de información.

Sea $S = [b_{\ell-1}\, b_{\ell-2}\, \ldots\, b_2\, b_1\, b_0]$ un string, $S \in \mathbb{B}^{\ell}$, cualquiera. Si notamos

$$S_{m\times} = [b_{\ell-1}\, b_{\ell-2}\, \ldots\, b_{\ell-m}] = \bigotimes_{i=\ell-1}^{\ell-m} \mathrm{K}_{b_i}$$

$$S_{\times n} = [b_{n-1}\, \ldots\, b_2\, b_1\, b_0] = \bigotimes_{i=n-1}^{0} \mathrm{K}_{b_i}$$

los strings cabeza $S_{m\times}$, de longitud $m \leq \ell$, y cola $S_{\times n}$, de longitud $n \leq \ell$, en que queda partido S, de longitud $\ell = m + n$, entonces es inmediato que:

$$S = \otimes\, S_{m\times}\, S_{\times n} \quad (\ell = m + n),$$

lo que demuestra que no se pierde información al partir un string.

Luego si S es el string de estado actual del autómata $\mathcal{A}$ e I es el string de entrada, notamos $P = \otimes\, S\, I$, y la ecuación dinámica queda:

$$\mathcal{Q} = \left\langle \mathbf{S} + \mathbf{O}, \mathbf{P}; (\mathcal{A}_{Pq}) \right\rangle \quad \text{o bien} \quad \mathcal{Q} = \oplus\, P\, \mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \oplus \otimes S\, I\, \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$$

donde $\mathcal{Q}$ es un vector probabilístico si $\mathbf{P} > 0$ y un string si $\mathbf{P} = 0$. En cualquier caso, escribiremos $Q \leftarrow \mathcal{Q}$ si el vector $\mathcal{Q}$ *sabemos que toma como valor* el string Q, y entonces el string de estado siguiente N y el string de salida O valen:

$$N = Q_{\mathbf{S}\times} \qquad O = Q_{\times\mathbf{O}}.$$

A.5.3 El tiempo

Ahora describiremos el paso de un instante al siguiente. Recordemos que denominamos string al valor que toma un vector y stream a la secuencia de strings ordenada creciendo desde el instante inicial.

Utilizaremos números naturales para referirnos a los instantes del tiempo. El instante inicial utilizará el número 0, y cada instante utilizará el número siguiente al utilizado por el instante anterior. Denominaremos tiempo, $\mathbb{T}$, al conjunto de todos los instantes, $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Es decir, que al vector $\mathcal{V}$ en el instante $t \in \mathbb{T}$ lo denotaremos $\mathcal{V}(t)$ y a su valor, si lo conocemos, $V(t)$. Si conocemos su valor en el instante siguiente, lo anotaremos $V(t+1) \leftarrow \mathcal{V}(t+1)$.

Ya podemos establecer la *ecuación temporal* de los autómatas, a saber, que el estado siguiente del instante actual, $\mathcal{N}(t)$, es el estado actual del instante siguiente, $\mathcal{S}(t+1)$. Es decir:

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{S}(t+1).$$

A.5.4 La función de transferencia

Si aplicamos el stream de entrada $I(0), I(1), \ldots, I(\tau)$, de duración δ, $\delta = \tau + 1$, al autómata $\mathcal{A}$ en el estado inicial S_0, $\mathcal{S}(0) = S_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}}$, obtendremos en el instante final τ un string de salida del que, *a priori*, sólo podemos conocer su vector de probabilidad $\mathcal{O}(\tau)$. Para calcular $\mathcal{O}(\tau)$ hemos de aplicar reiteradamente la ecuación dinámica. Notando con sombrero las probabilidades, $\mathcal{A}_{pq}/2^{\mathbf{P}} = \hat{\mathcal{A}}_{pq}$, y teniendo en cuenta que, por la ecuación temporal, n_t y s_{t+1} son dos sinónimos del mismo índice, queda:

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}\Big(S_0; I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\Big) = \\
&\qquad = \sum_{s_\tau n_\tau} \hat{\mathcal{A}}_{s_\tau I(\tau) n_\tau o_\tau} \cdot \sum_{\substack{s_{\tau-1}\\ o_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{A}}_{s_{\tau-1} I(\tau-1) n_{\tau-1} o_{\tau-1}} \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \sum_{s_1 o_1} \hat{\mathcal{A}}_{s_1 I(1) n_1 o_1} \cdot \sum_{o_0} \hat{\mathcal{A}}_{S_0 I(0) n_0 o_0} .
\end{aligned}$$

Llamamos *función de transferencia* del autómata $\mathcal{A}$ desde su estado S_0, $S_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}}$, y la notamos $Z^{\mathcal{A}}_{S_0}$, a la función que hace corresponder, cada uno de los posibles streams de entrada a $\mathcal{A}$, con el vector probabilístico que describe la salida que se obtendría en el instante final si se aplicara dicho stream de entrada al autómata $\mathcal{A}$ desde el estado S_0. Es decir:

$$Z^{\mathcal{A}}_{S_0}\big(I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\big) = \mathcal{O}(\tau),$$

que se calcula como hemos visto arriba.

Extensión probabilística La extensión probabilística de la función de transferencia, notada $\mathcal{Z}^{\mathcal{A}}_{S_0}$, hace la misma correspondencia que $Z^{\mathcal{A}}_{S_0}$ cuando, en vez de conocer el stream de entrada, tenemos su descripción probabilística $\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \ldots, \mathcal{J}(\tau)$. O sea,

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}\Big(S_0; \mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \ldots, \mathcal{J}(\tau)\Big) = \\
&\quad = \sum_{\imath_\tau s_\tau n_\tau} \hat{\mathcal{J}}(\tau)_{\imath_\tau}\, \hat{\mathcal{A}}_{s_\tau \imath_\tau n_\tau o_\tau} \cdot \sum_{\substack{\imath_{\tau-1}\\ s_{\tau-1}\\ o_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{J}}(\tau-1)_{\imath_{\tau-1}}\, \hat{\mathcal{A}}_{s_{\tau-1} \imath_{\tau-1} n_{\tau-1} o_{\tau-1}} \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots \sum_{\imath_1 s_1 o_1} \hat{\mathcal{J}}(1)_{\imath_1}\, \hat{\mathcal{A}}_{s_1 \imath_1 n_1 o_1} \cdot \sum_{\imath_0 o_0} \hat{\mathcal{J}}(0)_{\imath_0}\, \hat{\mathcal{A}}_{S_0 \imath_0 n_0 o_0} .
\end{aligned}$$

Teorema Se tiene que:

$$Z_{S_0}^{\mathcal{A}} = Z_{S_0'}^{\mathcal{A}'} \Longrightarrow \mathcal{Z}_{S_0}^{\mathcal{A}} = \mathcal{Z}_{S_0'}^{\mathcal{A}'}.$$

Demostración

$$\begin{aligned}
&Z_{S_0}^{\mathcal{A}} = Z_{S_0'}^{\mathcal{A}'} \Longrightarrow \forall I(0), I(1), \ldots, I(\tau):\\
&\qquad \hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}^{\mathcal{A}}\Big(S_0; I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\Big) = \hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}^{\mathcal{A}'}\Big(S_0'; I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\Big).
\end{aligned}$$

Y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}^{\mathcal{A}}\Big(S_0; \mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \ldots, \mathcal{J}(\tau)\Big) = \\
&\quad = \sum_{\imath_\tau \imath_{\tau-1} \ldots \imath_1 \imath_0} \hat{\mathcal{J}}(\tau)_{\imath_\tau}\, \hat{\mathcal{J}}(\tau-1)_{\imath_{\tau-1}} \ldots \hat{\mathcal{J}}(1)_{\imath_1}\, \hat{\mathcal{J}}(0)_{\imath_0} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{s_\tau n_\tau} \hat{\mathcal{A}}_{s_\tau \imath_\tau n_\tau o_\tau} \cdot \sum_{\substack{s_{\tau-1}\\ o_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{A}}_{s_{\tau-1} \imath_{\tau-1} n_{\tau-1} o_{\tau-1}} \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \sum_{s_1 o_1} \hat{\mathcal{A}}_{s_1 \imath_1 n_1 o_1} \cdot \sum_{o_0} \hat{\mathcal{A}}_{S_0 \imath_0 n_0 o_0} = \\
&\quad = \sum_{\imath_\tau \imath_{\tau-1} \ldots \imath_1 \imath_0} \hat{\mathcal{J}}(\tau)_{\imath_\tau}\, \hat{\mathcal{J}}(\tau-1)_{\imath_{\tau-1}} \ldots \hat{\mathcal{J}}(1)_{\imath_1}\, \hat{\mathcal{J}}(0)_{\imath_0} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{s'_\tau n'_\tau} \hat{\mathcal{A}}'_{s'_\tau \imath_\tau n'_\tau o_\tau} \cdot \sum_{\substack{s'_{\tau-1}\\ o_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{A}}'_{s'_{\tau-1} \imath_{\tau-1} n'_{\tau-1} o_{\tau-1}} \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \sum_{s'_1 o_1} \hat{\mathcal{A}}'_{s'_1 \imath_1 n'_1 o_1} \cdot \sum_{o_0} \hat{\mathcal{A}}'_{S'_0 \imath_0 n'_0 o_0} = \\
&\quad = \hat{\mathcal{O}}_{o_\tau}^{\mathcal{A}'}\Big(S_0'; \mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \ldots, \mathcal{J}(\tau)\Big).
\end{aligned}$$

Con lo que se demuestra que: $Z_{S_0}^{\mathcal{A}} = Z_{S_0'}^{\mathcal{A}'} \Longrightarrow \mathcal{Z}_{S_0}^{\mathcal{A}} = \mathcal{Z}_{S_0'}^{\mathcal{A}'}$.

Extensión temporal La extensión en el tiempo de la función de transferencia, notada $\vec{Z}_{S_0}^{\mathcal{A}}$, es la función que devuelve, en vez del valor final $\mathcal{O}(\tau)$ como $Z_{S_0}^{\mathcal{A}}$, toda la secuencia $\mathcal{O}(0), \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(\tau)$.

A.5.5 El comportamiento

Las *variables externas* son las de entrada al autómata y las de salida del autómata. Al par de streams desarrollado por estos dos vectores lo denominamos *apariencia del autómata*.

Teorema Si $Z^{\mathcal{A}}_{S_0} = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}$ entonces no se puede distinguir, por su apariencia, a $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}'$.

Demostración Si $Z^{\mathcal{A}}_{S_0} = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}$ entonces, para cualquier stream de entrada $I(0), I(1), \ldots I(\tau)$, se tiene que:

$$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}(0) = Z^{\mathcal{A}}_{S_0}\Big(I(0)\Big) = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}\Big(I(0)\Big) = \mathcal{O}^{\mathcal{A}'}(0)$$
$$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}(1) = Z^{\mathcal{A}}_{S_0}\Big(I(0), I(1)\Big) = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}\Big(I(0), I(1)\Big) = \mathcal{O}^{\mathcal{A}'}(1)$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{O}^{\mathcal{A}}(\tau) = Z^{\mathcal{A}}_{S_0}\Big(I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\Big) = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}\Big(I(0), I(1), \ldots, I(\tau)\Big) = \mathcal{O}^{\mathcal{A}'}(\tau)$$

lo que significa que ni siquiera probabilísticamente es posible distinguir por su apariencia a $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}'$.

Corolario Eso también prueba, en relación a la extensión en el tiempo de la función de transferencia, $\vec{Z}^{\mathcal{A}}_{S_0}$, que:

$$Z^{\mathcal{A}}_{S_0} = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0} \Longrightarrow \vec{Z}^{\mathcal{A}}_{S_0} = \vec{Z}^{\mathcal{A}'}_{S'_0}.$$

Definiciones De aquí se deriva la definición de *indistinguibilidad*: decimos que dos autómatas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, son indistinguibles, y lo notamos $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$, si y sólo si, por definición, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{A}'}$, y $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{O}_{\mathcal{A}'}$, y se cumple que:

$$(\exists S_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}_{\mathcal{A}}}) \wedge (\exists S'_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}_{\mathcal{A}'}}) :\ Z^{\mathcal{A}}_{S_0} = Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0}.$$

También decimos, en este caso, que S_0 y S'_0 son *estados equivalentes*.

La indistinguibilidad depende del estado inicial, pero si cada estado de $\mathcal{A}$ tuviera algún estado equivalente en $\mathcal{A}'$, y *vice versa*, entonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ serían indistinguibles independientemente del estado inicial.

Esto nos sugiere la definición de *equivalencia*: decimos que dos autómatas, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, son equivalentes, y lo notamos $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}'$, si y sólo si, por definición, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}_{\mathcal{A}'}$, y $\mathbf{O}_{\mathcal{A}} = \mathbf{O}_{\mathcal{A}'}$, y se cumple que:

$$\{Z^{\mathcal{A}}_{S_0} : S_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}_{\mathcal{A}}}\} = \{Z^{\mathcal{A}'}_{S'_0} : S'_0 \in \mathbb{B}^{\mathbf{S}_{\mathcal{A}'}}\}.$$

La indistinguibilidad es más débil que la equivalencia, y ésta es más débil que la igualdad:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{A} \approx \mathcal{A}'.$$

La equivalencia de autómatas es una relación de equivalencia, y de ahí su nombre:

$$\begin{aligned} \forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}: \qquad\qquad & \mathcal{A} \equiv \mathcal{A} \\ & \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \\ & (\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}) \Longrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{C}\,. \end{aligned}$$

Denominamos *comportamiento* a cada elemento del conjunto cociente definido por la equivalencia sobre el conjunto de los autómatas,

$$\{\text{Comportamiento}\} = \{\mathcal{A}\}/\equiv\,.$$

Es decir, que si dos autómatas son equivalentes, $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$, entonces decimos que tienen el mismo comportamiento.

La indistinguibilidad no es una relación de equivalencia. Por ejemplo:

$$(\oplus \otimes \odot \,\text{FORK}\, \mathcal{I}\, \text{XOR} \approx \mathcal{I}) \wedge (\oplus \otimes \odot \,\text{FORK}\, \mathcal{I}\, \text{XOR} \approx \text{NOT}) \wedge (\mathcal{I} \not\approx \text{NOT}).$$

Si el estado inicial del autómata $\oplus \otimes \odot \,\text{FORK}\, \mathcal{I}\, \text{XOR}$ es 1, entonces se distingue del autómata $\mathcal{I}$.

Ampliabilidad Cuando interesa más el comportamiento que la igualdad, se pueden utilizar las siguientes definiciones alternativas de ampliación:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \,\tilde{\triangleright}\, \mathcal{A} &\iff \Big(\mathbf{I}_{\mathcal{B}} > \mathbf{I}_{\mathcal{A}}\Big) \wedge \Big(\exists c : \text{Syntax}(c, \mathbf{I}_{\mathcal{B}} - \mathbf{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) \approx \mathcal{A}\Big), \\ \mathcal{B} \,\bar{\triangleright}\, \mathcal{A} &\iff \Big(\mathbf{I}_{\mathcal{B}} > \mathbf{I}_{\mathcal{A}}\Big) \wedge \Big(\exists c : \text{Syntax}(c, \mathbf{I}_{\mathcal{B}} - \mathbf{I}_{\mathcal{A}}, \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}\Big). \end{aligned}$$

A.5.6 La dinámica compuesta

El cálculo de la dinámica de un autómata compuesto puede hacerse calculando primero el autómata compuesto, utilizando para ello las definiciones de las composiciones, y aplicando entonces la ecuación dinámica, o puede hacerse aplicando la ecuación dinámica a cada parte y componiendo los resultados como se propone a continuación.

Nótese que si *conocemos* los valores determinados Q que toman los vectores $\mathcal{Q}$ ($Q \leftarrow \mathcal{Q}$), entonces pueden ser utilizados los cálculos desacoplados, por partes, o paso a paso. La ecuación temporal toma, en este caso, la forma: $N(t) = S(t+1)$.

Composición en serie El nombre de la composición en serie tiene sentido porque

$$Z^{\oplus \mathcal{B}\mathcal{C}}_{\otimes S_{\mathcal{B}} S_{\mathcal{C}}} = \vec{Z}^{\mathcal{B}}_{S_{\mathcal{B}}} \circ \mathcal{Z}^{\mathcal{C}}_{S_{\mathcal{C}}}$$

donde $\circ$ denota la composición de funciones, $[g \circ f](x) = f\big(g(x)\big)$, y $\mathcal{Z}$ y $\vec{Z}$ son las extensiones, probabilística y temporal, de la función de transferencia Z.

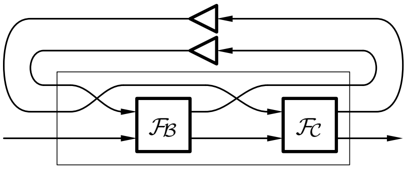
Demostración Notamos $\mathcal{A} = \oplus \mathcal{B}\,\mathcal{C}$ y, por tratarse de strings,

$$\dot{S}_0 = S^{\mathcal{A}}(0)_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} \qquad \ddot{S}_0 = S^{\mathcal{A}}(0)_{\times\mathbf{S}_{\mathcal{C}}}.$$

Por la definición de la composición en serie, $I^{\mathcal{B}}(t) = I^{\mathcal{A}}(t)$, que notamos abreviadamente I_t.

La disposición de los índices se muestra en la figura, de la cual también se deduce que:

$$\mathcal{F}_{\oplus\mathcal{B}\mathcal{C}} = \oplus\oplus\oplus\otimes \mathrm{Cross}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}},\mathbf{S}_{\mathcal{C}}}\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}_{\mathcal{B}}} \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{S}_{\mathcal{C}}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{Cross}_{\mathbf{S}_{\mathcal{C}},\mathbf{S}_{\mathcal{B}}}\, \mathcal{I}_{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}} \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{C}}\,.$$



Composición en serie

Primero calculamos, dentro de la composición $\oplus\mathcal{B}\,\mathcal{C}$, el vector estado-siguiente+salida de $\mathcal{B}$, que notamos ${}^{\mathcal{B}}\mathcal{Q}$. Para ello sustituimos $\hat{\mathcal{A}}_{\dot{s}_t\ddot{s}_t\imath_t\dot{n}_t\ddot{n}_t\ddot{o}_t}$ por $\sum_{\dot{o}_t} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_t\imath_t\dot{n}_t\dot{o}_t} \cdot \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_t\dot{o}_t\ddot{n}_t\ddot{o}_t}$ en la ecuación dinámica aplicada reiteradamente y, en el instante final σ, dejamos libres los índices $\dot{n}_\sigma$ y $\dot{o}_\sigma$.

$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_\sigma\dot{o}_\sigma} = &\sum_{\dot{s}_\sigma\ddot{s}_\sigma\ddot{n}_\sigma\ddot{o}_\sigma} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_\sigma I_\sigma \dot{n}_\sigma\dot{o}_\sigma}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_\sigma\dot{o}_\sigma\ddot{n}_\sigma\ddot{o}_\sigma} \cdot \\
&\cdot \sum_{\substack{\dot{s}_{\sigma-1}\ddot{s}_{\sigma-1}\\ \dot{o}_{\sigma-1}\ddot{o}_{\sigma-1}}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_{\sigma-1}I_{\sigma-1}\dot{n}_{\sigma-1}\dot{o}_{\sigma-1}}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_{\sigma-1}\dot{o}_{\sigma-1}\ddot{n}_{\sigma-1}\ddot{o}_{\sigma-1}} \cdots \\
&\cdots \sum_{\substack{\dot{s}_1\ddot{s}_1\\ \dot{o}_1\ddot{o}_1}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_1 I_1 \dot{n}_1\dot{o}_1}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_1\dot{o}_1\ddot{n}_1\ddot{o}_1} \cdot \sum_{\dot{o}_0\ddot{o}_0} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0 I_0 \dot{n}_0\dot{o}_0}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0\dot{o}_0\ddot{n}_0\ddot{o}_0}\,.
\end{aligned}$$

Como resulta que

$$\forall s, \imath : \sum_{\ddot{n}\ddot{o}} \hat{\mathcal{C}}_{s\imath\ddot{n}\ddot{o}} = 1,$$

y recordando que, merced a la ecuación temporal, $\ddot{s}_t$ también puede escribirse como $\ddot{n}_{t-1}$, pueden eliminarse todas las apariciones de $\hat{\mathcal{C}}_{s\imath\ddot{n}\ddot{o}}$, con lo que queda:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_\sigma\dot{o}_\sigma} = &\sum_{\dot{s}_\sigma} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_\sigma I_\sigma \dot{n}_\sigma\dot{o}_\sigma} \cdot \sum_{\substack{\dot{s}_{\sigma-1}\\ \dot{o}_{\sigma-1}}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_{\sigma-1}I_{\sigma-1}\dot{n}_{\sigma-1}\dot{o}_{\sigma-1}} \cdots \\
&\cdots \sum_{\dot{s}_1\dot{o}_1} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_1 I_1 \dot{n}_1\dot{o}_1} \cdot \sum_{\dot{o}_0} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0 I_0 \dot{n}_0\dot{o}_0} = \hat{\mathcal{Q}}^{\mathcal{B}}_{\dot{n}_\sigma\dot{o}_\sigma}(\dot{S}_0; I_0, I_1, \ldots, I_\sigma).
\end{aligned}$$

Es decir, que $\mathcal{B}$ funciona dentro de $\oplus\mathcal{B}\mathcal{C}$ del mismo modo que solo y, lo que es más importante, ${}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_\sigma \dot{o}_\sigma}$ únicamente depende del estado inicial $\dot{S}_0$ y del stream de entrada $I_0, I_1, \ldots, I_\sigma$. Este resultado será útil a continuación.

Ahora sustituimos $\hat{\mathcal{A}}_{\dot{s}_t \ddot{s}_t i_t \dot{n}_t \ddot{n}_t \ddot{o}_t}$ por $\sum_{\dot{o}_t} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_t i_t \dot{n}_t \dot{o}_t} \cdot \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_t \dot{o}_t \ddot{n}_t \ddot{o}_t}$ en la expresión que calcula $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}$, y tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}_{\ddot{o}_\tau}\Big(S^{\mathcal{A}}(0); I_0, I_1, \ldots, I_\tau\Big) = \\
&\quad = \sum_{\dot{s}_\tau \ddot{s}_\tau \dot{n}_\tau \ddot{n}_\tau} \left(\sum_{\dot{o}_\tau} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_\tau I_\tau \dot{n}_\tau \dot{o}_\tau}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_\tau \dot{o}_\tau \ddot{n}_\tau \ddot{o}_\tau}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{\substack{\dot{s}_{\tau-1} \ddot{s}_{\tau-1} \\ \ddot{o}_{\tau-1}}} \left(\sum_{\dot{o}_{\tau-1}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_{\tau-1} I_{\tau-1} \dot{n}_{\tau-1} \dot{o}_{\tau-1}}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_{\tau-1} \dot{o}_{\tau-1} \ddot{n}_{\tau-1} \ddot{o}_{\tau-1}}\right) \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad \cdots \sum_{\substack{\dot{s}_1 \ddot{s}_1 \\ \ddot{o}_1}} \left(\sum_{\dot{o}_1} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_1 I_1 \dot{n}_1 \dot{o}_1}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_1 \dot{o}_1 \ddot{n}_1 \ddot{o}_1}\right) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \sum_{\ddot{o}_0} \left(\sum_{\dot{o}_0} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0 I_0 \dot{n}_0 \dot{o}_0}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0 \dot{o}_0 \ddot{n}_0 \ddot{o}_0}\right) = \\
&\quad = \sum_{\dot{o}_\tau \ddot{s}_\tau \dot{n}_\tau \ddot{n}_\tau} {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_\tau \dot{o}_\tau}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_\tau \dot{o}_\tau \ddot{n}_\tau \ddot{o}_\tau} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \sum_{\substack{\dot{s}_\tau \ddot{s}_{\tau-1} \\ \dot{o}_{\tau-1} \ddot{o}_{\tau-1}}} {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_{\tau-1} \dot{o}_{\tau-1}}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_{\tau-1} \dot{o}_{\tau-1} \ddot{n}_{\tau-1} \ddot{o}_{\tau-1}} \cdots \\
&\qquad\qquad\quad \cdots \sum_{\dot{s}_2 \ddot{s}_1 \dot{o}_1 \ddot{o}_1} {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_1 \dot{o}_1}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_1 \dot{o}_1 \ddot{n}_1 \ddot{o}_1} \cdot \sum_{\dot{s}_1 \dot{o}_0 \ddot{o}_0} {}^{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{Q}}_{\dot{n}_0 \dot{o}_0}\, \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0 \dot{o}_0 \ddot{n}_0 \ddot{o}_0} = \\
&\quad = \hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{C}}_{\ddot{o}_\tau}\Big(\ddot{S}_0; \mathcal{O}^{\mathcal{B}}(\dot{S}_0; I_0), \mathcal{O}^{\mathcal{B}}(\dot{S}_0; I_0, I_1), \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \ldots, \mathcal{O}^{\mathcal{B}}(\dot{S}_0; I_0, I_1, \ldots, I_{\tau-1}), \mathcal{O}^{\mathcal{B}}(\dot{S}_0; I_0, I_1, \ldots, I_\tau)\Big).
\end{aligned}
$$

Con lo que se demuestra que: $Z^{\oplus\mathcal{B}\mathcal{C}}_{\otimes \dot{S}_0 \ddot{S}_0} = \vec{Z}^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} \circ \mathcal{Z}^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0}$.

Sabiendo los valores determinados Q que toman los vectores de estado-siguiente+salida, se pueden utilizar los cálculos desacoplados, o paso a paso, como sigue:

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{B}} &= \oplus \otimes S^{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} I^{\mathcal{A}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \\
I^{\mathcal{C}} = O^{\mathcal{B}} &= Q^{\mathcal{B}}_{\times \mathbf{O}_{\mathcal{B}}} \\
Q^{\mathcal{C}} \leftarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{C}} &= \oplus \otimes S^{\mathcal{A}}_{\times \mathbf{S}_{\mathcal{C}}} I^{\mathcal{C}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \\
N^{\mathcal{A}} &= \otimes N^{\mathcal{B}} N^{\mathcal{C}} = \otimes Q^{\mathcal{B}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} Q^{\mathcal{C}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{C}}\times} \\
O^{\mathcal{A}} &= O^{\mathcal{C}} = Q^{\mathcal{C}}_{\times \mathbf{O}_{\mathcal{C}}}.
\end{aligned}
$$

Composición en paralelo El nombre de la composición en paralelo tiene sentido porque

$$Z^{\otimes\mathcal{BC}}_{\otimes S_{\mathcal{B}} S_{\mathcal{C}}} = Z^{\mathcal{B}}_{S_{\mathcal{B}}} \times Z^{\mathcal{C}}_{S_{\mathcal{C}}}$$

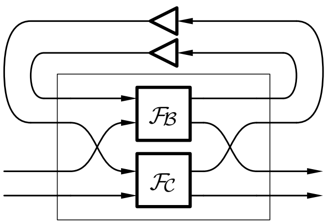
notando $\times$ el producto cartesiano de funciones, $[f \times g](x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$.

Demostración Notamos $\mathcal{A} = \otimes\mathcal{B}\,\mathcal{C}$ y, por tratarse de strings,

$$\begin{aligned} \dot{I}_t &= I^{\mathcal{A}}(t)_{\mathbf{I}_{\mathcal{B}}\times} & \qquad \ddot{I}_t &= I^{\mathcal{A}}(t)_{\times\mathbf{I}_{\mathcal{C}}} \\ \dot{S}_0 &= S^{\mathcal{A}}(0)_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} & \qquad \ddot{S}_0 &= S^{\mathcal{A}}(0)_{\times\mathbf{S}_{\mathcal{C}}}. \end{aligned}$$

La disposición de los índices se muestra en la figura, de la cual también se deduce que:

$$\mathcal{F}_{\otimes\mathcal{BC}} = \oplus\oplus\otimes\otimes\,\mathcal{I}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}}\,\mathrm{Cross}_{\mathbf{S}_{\mathcal{C}},\mathbf{I}_{\mathcal{B}}}\,\mathcal{I}_{\mathbf{I}_{\mathcal{C}}} \otimes \mathcal{F}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \otimes\otimes\,\mathcal{I}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}}\,\mathrm{Cross}_{\mathbf{O}_{\mathcal{B}},\mathbf{S}_{\mathcal{C}}}\,\mathcal{I}_{\mathbf{O}_{\mathcal{C}}}\,.$$



Composición en paralelo

Sustituyendo $\hat{\mathcal{A}}_{\dot{s}_t\ddot{s}_t\dot{\imath}_t\ddot{\imath}_t\dot{n}_t\ddot{n}_t\dot{o}_t\ddot{o}_t}$ por $\hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_t\dot{\imath}_t\dot{n}_t\dot{o}_t} \cdot \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_t\ddot{\imath}_t\ddot{n}_t\ddot{o}_t}$ en la expresión que calcula $\mathcal{O}^{\mathcal{A}}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{A}}_{o_\tau}\Big(S^{\mathcal{A}}(0); I^{\mathcal{A}}(0), I^{\mathcal{A}}(1), \ldots, I^{\mathcal{A}}(\tau)\Big) = \\ &\qquad = \sum_{\dot{s}_\tau\ddot{s}_\tau\dot{n}_\tau\ddot{n}_\tau} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_\tau\dot{I}_\tau\dot{n}_\tau\dot{o}_\tau}\,\hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_\tau\ddot{I}_\tau\ddot{n}_\tau\ddot{o}_\tau}\,\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \sum_{\substack{\dot{s}_{\tau-1}\ddot{s}_{\tau-1}\\ \dot{o}_{\tau-1}\ddot{o}_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_{\tau-1}\dot{I}_{\tau-1}\dot{n}_{\tau-1}\dot{o}_{\tau-1}}\,\hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_{\tau-1}\ddot{I}_{\tau-1}\ddot{n}_{\tau-1}\ddot{o}_{\tau-1}} \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad \cdots \sum_{\substack{\dot{s}_1\ddot{s}_1\\ \dot{o}_1\ddot{o}_1}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_1\dot{I}_1\dot{n}_1\dot{o}_1}\,\hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_1\ddot{I}_1\ddot{n}_1\ddot{o}_1} \cdot \sum_{\dot{o}_0\ddot{o}_0} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0\dot{I}_0\dot{n}_0\dot{o}_0}\,\hat{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0\ddot{I}_0\ddot{n}_0\ddot{o}_0} = \end{aligned}$$

$$= \Bigg(\sum_{\dot{s}_\tau \dot{n}_\tau} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_\tau \dot{I}_\tau \dot{n}_\tau \dot{o}_\tau} \cdot \sum_{\substack{\dot{s}_{\tau-1} \\ \dot{o}_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_{\tau-1} \dot{I}_{\tau-1} \dot{n}_{\tau-1} \dot{o}_{\tau-1}} \cdots$$
$$\cdots \sum_{\dot{s}_1 \dot{o}_1} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{s}_1 \dot{I}_1 \dot{n}_1 \dot{o}_1} \cdot \sum_{\dot{o}_0} \hat{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0 \dot{I}_0 \dot{n}_0 \dot{o}_0} \Bigg) \cdot$$
$$\cdot \Bigg(\sum_{\ddot{s}_\tau \ddot{n}_\tau} \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_\tau \ddot{I}_\tau \ddot{n}_\tau \ddot{o}_\tau} \cdot \sum_{\substack{\ddot{s}_{\tau-1} \\ \ddot{o}_{\tau-1}}} \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_{\tau-1} \ddot{I}_{\tau-1} \ddot{n}_{\tau-1} \ddot{o}_{\tau-1}} \cdots$$
$$\cdots \sum_{\ddot{s}_1 \ddot{o}_1} \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{s}_1 \ddot{I}_1 \ddot{n}_1 \ddot{o}_1} \cdot \sum_{\ddot{o}_0} \hat{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0 \ddot{I}_0 \ddot{n}_0 \ddot{o}_0} \Bigg) =$$
$$= \hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{B}}_{\dot{o}_\tau}(\dot{S}_0; \dot{I}_0, \dot{I}_1, \ldots, \dot{I}_\tau) \cdot \hat{\mathcal{O}}^{\mathcal{C}}_{\ddot{o}_\tau}(\ddot{S}_0; \ddot{I}_0, \ddot{I}_1, \ldots, \ddot{I}_\tau).$$

De modo que $\mathcal{O}^{\otimes\mathcal{BC}} = \otimes\, \mathcal{O}^{\mathcal{B}}\, \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ y, en definitiva: $Z^{\otimes\mathcal{BC}}_{\otimes \dot{S}_0 \ddot{S}_0} = Z^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} \times Z^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0}$.

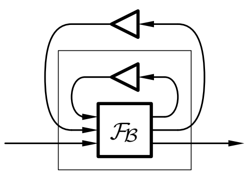
Conociendo los valores determinados que toman los vectores $\mathcal{Q}$, de estado-siguiente+salida, podemos aplicar los cálculos paso a paso o desacoplados:

$$\begin{aligned} Q^{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{B}} &= \oplus \otimes S^{\mathcal{A}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} I^{\mathcal{A}}_{\mathbf{I}_{\mathcal{B}}\times}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \\ Q^{\mathcal{C}} \leftarrow \mathcal{Q}^{\mathcal{C}} &= \oplus \otimes S^{\mathcal{A}}_{\times\mathbf{S}_{\mathcal{C}}} I^{\mathcal{A}}_{\times\mathbf{I}_{\mathcal{C}}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \\ N^{\mathcal{A}} &= \otimes N^{\mathcal{B}} N^{\mathcal{C}} = \otimes Q^{\mathcal{B}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}\times} Q^{\mathcal{C}}_{\mathbf{S}_{\mathcal{C}}\times} \\ O^{\mathcal{A}} &= \otimes O^{\mathcal{B}} O^{\mathcal{C}} = \otimes Q^{\mathcal{B}}_{\times\mathbf{O}_{\mathcal{B}}} Q^{\mathcal{C}}_{\times\mathbf{O}_{\mathcal{C}}}. \end{aligned}$$

Composición de realimentación Véase que:

$$\odot\, \mathcal{B} = \odot \odot^{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \odot^{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}+1}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \Longrightarrow \mathcal{F}_{\odot\mathcal{B}} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}\,.$$

La figura muestra la situación.



Composición de realimentación

Los cálculos desacoplados son, en este caso, sencillos:

$$Q \leftarrow \mathcal{Q}^{\odot\mathcal{B}} = \oplus \otimes S^{\odot\mathcal{B}} I^{\odot\mathcal{B}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{B}}\,.$$

Y, por lo tanto:

$$N^{\odot\mathcal{B}} = Q_{\mathbf{S}_{\mathcal{B}}+1\times} \qquad O^{\odot\mathcal{B}} = Q_{\times\mathbf{O}_{\mathcal{B}}-1}.$$

Teorema Si $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ es una *función automática* cualquiera, es decir, una expresión en la que si sustituimos $\mathcal{X}$ por un autómata resulta un autómata, entonces $\forall \mathcal{A}, \mathcal{A}' : \ \mathcal{A} \approx \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \approx \mathcal{F}(\mathcal{A}')$.

Demostración Si $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$ entonces $Z^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} = Z^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0}$ y, por tanto, $\vec{Z}^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} = \vec{Z}^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0}$, y si $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$ entonces $Z^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0} = Z^{\mathcal{C}'}_{\ddot{S}'_0}$ y, por consiguiente, $\mathcal{Z}^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0} = \mathcal{Z}^{\mathcal{C}'}_{\ddot{S}'_0}$. De aquí se sigue que $\vec{Z}^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} \circ \mathcal{Z}^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0} = \vec{Z}^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0} \circ \mathcal{Z}^{\mathcal{C}'}_{\ddot{S}'_0}$, lo cual prueba que:

$$(\mathcal{B} \approx \mathcal{B}') \wedge (\mathcal{C} \approx \mathcal{C}') \Longrightarrow \oplus \mathcal{B}\,\mathcal{C} \approx \oplus \mathcal{B}'\,\mathcal{C}'\,.$$

Si $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$ entonces $Z^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} = Z^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0}$, y si $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}'$ entonces $Z^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0} = Z^{\mathcal{C}'}_{\ddot{S}'_0}$. De aquí se sigue que $Z^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} \times Z^{\mathcal{C}}_{\ddot{S}_0} = Z^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0} \times Z^{\mathcal{C}'}_{\ddot{S}'_0}$, lo cual prueba que:

$$(\mathcal{B} \approx \mathcal{B}') \wedge (\mathcal{C} \approx \mathcal{C}') \Longrightarrow \otimes \mathcal{B}\,\mathcal{C} \approx \otimes \mathcal{B}'\,\mathcal{C}'\,.$$

Si $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$ entonces $Z^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} = Z^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0}$ y, por tanto, $\mathcal{Z}^{\mathcal{B}}_{\dot{S}_0} = \mathcal{Z}^{\mathcal{B}'}_{\dot{S}'_0}$, lo que significa que cualquier stream de vectores de entrada $\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \ldots, \mathcal{J}(\tau)$ aplicado a uno de los autómatas, $\mathcal{B}$, produce el mismo stream de vectores de salida $\mathcal{O}(0), \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(\tau)$ que aplicado al otro, $\mathcal{B}'$. Y puesto que sucede con cualquiera, también ocurrirá con aquellos streams de vectores de entrada cuya primera variable repite la primera variable de salida. Esto prueba que:

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}' \Longrightarrow \odot \mathcal{B} \approx \odot \mathcal{B}'\,.$$

La conjunción de estas tres pruebas, con $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \Longrightarrow \mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$, permite concluir que:

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \approx \mathcal{F}(\mathcal{A}').$$

Teorema De modo análogo se prueba que:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}' \Longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{F}(\mathcal{A}').$$

A.6 Subálgebras

A.6.1 El determinismo

Decimos que A es un *autómata determinístico* si se cumple que:

$$\mathbf{P}_A = 0.$$

Cualquier autómata determinístico A puede ser escrito utilizando, únicamente, los constructores: $\oplus$, $\otimes$, $\odot$, SINK, FORK, K1, NAND. Resumiendo:

$$\{A\} = \Re(\oplus, \otimes, \odot, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{K1}, \mathrm{NAND}).$$

La forma canónica de los autómatas determinísticos es análoga a la general. Obsérvese que si bien K1 puede ser descompuesto en los autómatas SINK, FORK, PROB y NAND, en cambio PROB no puede ser descompuesto en los autómatas SINK, FORK, K1 y NAND.

Los autómatas determinísticos admiten dos descomposiciones, a saber, la de Mealy y la de Moore.

La descomposición de Mealy, o en paralelo, del autómata A queda:

$$A = \odot^{\mathbf{S}_A} \oplus \mathrm{FORK}_{\mathbf{S}_A+\mathbf{I}_A} \otimes F^N\, F^O$$

donde F^N es la función determinística (véase la §A.6.2) de estado siguiente y F^O la función determinística de salida.

La descomposición de Moore, o en serie, del autómata A tiene la forma:

$$A \equiv \oplus \odot^{\mathbf{S}_M} \oplus F^S\, \mathrm{FORK}_{\mathbf{S}_M}\, F^{O'}$$

donde F^S es la función determinística de estado y $F^{O'}$ otra función determinística de salida. Se cumple que: $\mathbf{S}_M \geq \mathbf{S}_A$.

A.6.2 Funciones

Una *función* es cualquier autómata $\mathcal{F}$ tal que: $\mathbf{S}_\mathcal{F} = 0$.

Se tiene que: $\{\mathcal{F}\} = \Re(\oplus, \otimes, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{PROB}, \mathrm{NAND})$.

Nótese que ésta es, en general, una función probabilística. Así que una *función determinística* F ha de cumplir: $\mathbf{S}_F = 0$, $\mathbf{P}_F = 0$.

Se tiene que: $\{F\} = \Re(\oplus, \otimes, \mathrm{SINK}, \mathrm{FORK}, \mathrm{K1}, \mathrm{NAND})$.

Las funciones determinísticas F son funciones, en el sentido ordinario, del string de entrada en el string de salida, $F : \mathbb{B}^{\mathbf{I}_F} \to \mathbb{B}^{\mathbf{O}_F}$.

Una *función de encaminamiento* es una función determinística en la que cada variable de salida se limita a repetir el valor de alguna de las variables de entrada. En la §A.4.11 y la §A.4.13 las figuras muestran las funciones de encaminamiento.

La composición en serie de funciones $\oplus \mathcal{F}\mathcal{G}$ se corresponde con la multiplicación de matrices, $(\mathcal{F}_{\imath v}) \times (\mathcal{G}_{vo})$.

A.6.3 Vectores y strings

Es un vector todo aquel autómata $\mathcal{V}$ que cumple: $\mathbf{I}_\mathcal{V} = 0$, $\mathbf{S}_\mathcal{V} = 0$.

Los strings son los vectores determinísticos, esto es, aquellos autómatas S que cumplen: $\mathbf{I}_S = 0$, $\mathbf{S}_S = 0$, $\mathbf{P}_S = 0$.

Todos los strings se pueden construir componiendo los autómatas K1 y K0 en paralelo (véase la §A.4.9): $\{S\} = \Re(\otimes, \mathrm{K1}, \mathrm{K0})$.

A.6.4 El álgebra de Boole

El *álgebra de* Boole estudia las funciones determinísticas unarias, es decir, los autómatas B tales que:

$$\mathbf{O}_B = 1, \quad \mathbf{S}_B = 0, \quad \mathbf{P}_B = 0.$$

Puede hacerse la generalización al álgebra automática de una de las construcciones típicas del álgebra de Boole.

$$\mathrm{DeMorgan}(\mathcal{A}) = \oplus \oplus \otimes^{\mathbf{I}_\mathcal{A}} \mathrm{NOT}\, \mathcal{A} \otimes^{\mathbf{O}_\mathcal{A}} \mathrm{NOT}\,.$$

Se tiene que DeMorgan(OR) = AND, DeMorgan(AND) = OR. Pero además, saliéndonos del álgebra de BOOLE, DeMorgan(DEL) $\equiv$ DEL, con la particularidad de que los estados equivalentes son los opuestos.

Cualquier función determinística F puede descomponerse en un paralelo de $\mathbf{O}_F$ funciones booleanas, B_o:

$$F = \oplus \, \mathrm{Mult}_{\mathbf{O}_F, \mathbf{I}_F} \bigotimes_o B_o$$

donde $\mathrm{Mult}_{m,n}$ es una función de encaminamiento ya definida (en §A.4.11).

A.6.5 Cadenas de Markov

Una *cadena de* MARKOV (homogénea) es cualquier autómata $\mathcal{M}$ tal que:

$$\mathbf{I}_{\mathcal{M}} = 0, \quad \mathbf{O}_{\mathcal{M}} = 0.$$

De otra manera: $\mathcal{M} = \odot^n \mathcal{F}_\square$, siendo $\mathcal{F}_\square$ una función cuadrada, o sea:

$$\mathcal{M} = \odot^n \mathcal{F}_\square \; : \quad \mathbf{S}_{\mathcal{F}_\square} = 0 \, , \; \mathbf{I}_{\mathcal{F}_\square} = n = \mathbf{O}_{\mathcal{F}_\square} \, .$$

Un modelo markoviano $\mathcal{M}_M$ adopta la forma: $\mathcal{M}_M = \odot^n \oplus \mathcal{F}_\square \, \mathrm{FORK}_n$. Y un modelo markoviano oculto $\mathcal{M}_O$ es: $\mathcal{M}_O = \oplus \odot^n \oplus \mathcal{F}_\square \, \mathrm{FORK}_n \, \mathcal{F}$, siendo $\mathcal{F}$ una función cualquiera pero con $\mathbf{I}_{\mathcal{F}} = n$.

A.7 Conclusión

El álgebra automática permite una fácil formalización de la semántica de cualquier entidad que admita ser descrita como un autómata finito binario, por ejemplo una computadora, un programa o un lenguaje.

Agradecimientos

Un trabajo que está en esta misma línea, pero tomando la ruta de CHURCH (el cálculo λ) en vez de la de TURING (los autómatas finitos), y que ha servido de inspiración al presente Anexo es DELGADO[57]. El resto de la inspiración se tomó del libro de texto de FERNÁNDEZ y SÁEZ VACAS[58].

[57] Delgado Kloos, C. (1987): *Semantics of Digital Circuits*.

[58] Fernández Fernández, G.; Sáez Vacas, F. (1987): *Fundamentos de informática*.

Lista de figuras

Las figuras del texto principal y del anexo son, todas ellas, originales. Las figuras de la introducción han sido adaptadas mayormente de RESNIKOFF[59], y también de GAZZANIGA[60] y de ERNST[61]. El número que aparece al final de cada entrada indica la página en la que está la figura. Así, por ejemplo, 27 significa que la figura aparece en la página 27.

Introducción

El problema aparente

[59] Resnikoff, H.L. (1989): *The Illusion of Reality*.
[60] Gazzaniga, M.S. (1998): *The Mind's Past*.
[61] Ernst, B. (1978): *El espejo mágico de Maurits Cornelis Escher*.

Anexo

Bibliografía

Se señalan las ediciones de las obras consultadas. Los números que aparecen detrás del punto al final de cada reseña indican las páginas en las que la obra está citada, así 128 significa que la cita está en la página 128.

Abelson, H.; Sussman, G.J.; Sussman, J.: *Structure and Interpretation of Computer Programs*, The MIT Press, Cambridge MA, 1985, ISBN 0-262-51036-7. 128

Arbib, M.A.: *Brains, Machines, and Mathematics*, Springer Verlag, Nueva York, 1987, ISBN 0-387-96539-4. 27

Ashby, W.R.: *Introducción a la Cibernética* (1956), Nueva Visión, Buenos Aires, 1977. 99

Barrio G., J.: *Protágoras y Gorgias. Fragmentos y testimonios* (1977), Orbis, Barcelona, 1984, ISBN 84-7530-499-0. 19

Boole, G.: *An Investigation of the Laws of Thought* (1854), Dover, Nueva York, 1958, ISBN 0-486-60028-9. 22

Brun, J.: *Heráclito* (1965), Edaf, Madrid, 1976, ISBN 84-7640-441-7. 34

Cantor, G.: *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, vol. xlvi, xlix, 1895, 1897, pp. 481–512, 207–246. Traducido al inglés por P.E.B. Jourdain, Dover, Nueva York, 1955, ISBN 0-486-60045-9. 31

Chomsky, N.: *El conocimiento del lenguaje*, Alianza, Madrid, 1989, ISBN 84-206-2610-4. 33

Church, A.: *An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory*, Amer. J. of Math., vol. 58, 1936, pp. 345–363. 131

Churchland, P.S.: *Neurophilosophy: Toward a Unified Science of the Mind/Brain*, The MIT Press, Cambridge MA, 1986, ISBN 0-262-03116-7. 45

Darwin, Ch.: *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favored Races in the Struggle for Life* (1859), Penguin, Londres, 1985, ISBN 0-14-043205-1. 38, 147

Delgado Kloos, C.: *Semantics of Digital Circuits*, Springer Verlag, Berlín, 1987, ISBN 3-540-18540-2. 189

Descartes, R.: *Discurso del método, Meditaciones metafísicas* (1637, 41), Traducción, prólogo y notas de Manuel García Morente, Espasa-Calpe, Madrid, 1980, ISBN 84-239-2021-6. 52, 151

Ernst, B.: *El espejo mágico de Maurits Cornelis Escher* (1978), Taschen, Berlín, 1990, ISBN 3-89450-240-1. 191

Fernández Fernández, G.; Sáez Vacas, F.: *Fundamentos de informática*, Alianza, Madrid, 1987, ISBN 84-206-8604-2. 189

Feyerabend, P.: *Against Method*, edición revisada, Verso, Londres, 1988, ISBN 0-86091-934-X. 57, 149

Freud, S.: *La interpretación de los sueños* (1900), Traducción de Luis López-Ballesteros y de Torres (1923), Alianza, Madrid, 1966, ISBN 84-206-1993-0. 44, 145

Gazzaniga, M.S.: *The Mind's Past*, University of California Press, Berkeley, CA, 1998, ISBN 0-520-21320-3. 46, 191

Gödel, K.: *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme, I*, Monatsh. für Math. und Phys., vol. 38, 1931, pp. 173–198. Traducido al castellano por Jesús Mosterín, Alianza Universidad, Madrid, 1989, ISBN 84-206-2286-9. 26, 129

Hawking, S.W.: *Historia del tiempo. Del big bang a los agujeros negros*, Crítica, Barcelona, 1988, ISBN 84-7423-374-7. 54

Hofstadter, D.R.: *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (1979), Penguin, Londres, 1980, ISBN 0-14-005579-7. 26

Hume, D.: *An Enquiry concerning Human Understanding* (1748, 1777), Oxford University Press, Oxford, 1975, ISBN 0-19-824536-X. 56, 151

Kant, I.: *Crítica de la razón pura* (1781, 1787), Prólogo, traducción, notas e índices por Pedro Ribas, Alfaguara, Madrid, 1993, ISBN 84-204-0407-1. 70, 151

Klir, G.J.: *Teoría General de Sistemas* (1969), ICE, Madrid, 1980, ISBN 84-7085-104-7. 89

Kuhn, Th.S.: *The Structure of Scientific Revolutions*, 2ª edición, ampliada, The University of Chicago Press, Chicago, 1970, ISBN 0-226-45804-0. 57, 149

Lakatos, I.: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976, ISBN 0-521-29038-4. 28, 79

Lovelock, J.E.: *Gaia. A new look at life on Earth* (1979), Oxford University Press, Oxford, 1987, ISBN 0-19-286030-5. 63

McCulloch, W.S.; Pitts, W.H.: *A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity* (1943). Recopilado por W. McCulloch en "Embodiments of Mind", The MIT Press, Cambridge MA, 1988, ISBN 0-262-63114-8. 131

Minsky, M.: *The Society of Mind* (1985), Simon & Schuster, Nueva York, 1988, ISBN 0-671-65713-5. 66

Monod, J.: *El azar y la necesidad*, Barral, Barcelona, 1970. 66

Narendra, K.S.; Thathachar, M.A.L.: *Learning Automata: An Introduction*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989, ISBN 0-13-485558-2. 101

Northrop, E.P.: *Riddles in Mathematics* (1944), Penguin, Harmondsworth, Middlesex, England, 1978, ISBN 0-14-020478-4. 35

Ortega y G., J.: *Meditaciones del Quijote* (1914), Edición de Julián Marías, Cátedra, Madrid, 1995, ISBN 84-376-0481-8. 70

Penrose, R.: *The Emperor's New Mind. Concerning Computers, Minds, and The Laws of Physics*, Oxford University Press, Oxford, 1989, ISBN 0-19-851973-7. 55

Platón: *Diálogos* (IV a.C.), Introducción general por Emilio Lledó Íñigo, traducción y notas Carlos García Gual et al., Gredos, Madrid, 1981–1992, ISBN 84-249-1487-2. 70

Polya, G.: *How to solve it* (1957), Second edition, Penguin, Londres, 1990, ISBN 0-14-012499-3. 20

Popper, K.R.: *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico* (1972), Paidós, Barcelona, 1983, ISBN 84-7509-146-6. 56

Quine, W.V.O.: *Mathematical Logic*, edición revisada, Harvard University Press, Cambridge MA, 1940, ISBN 0-674-55451-5. 22

Real Academia Española: *Diccionario de la lengua española*, decimonovena edición, Madrid, 1970. 14

Resnikoff, H.L.: *The Illusion of Reality*, Springer Verlag, Nueva York, 1989, ISBN 0-387-96398-7. 191

Schopenhauer, A.: *El mundo como voluntad y representación* (1818), Porrúa, México, 1992, ISBN 968-432-886-9. 148

Searle, J.R.: *Minds, Brains, and Programs* (1980). Recopilado por M. Boden en "The Philosophy of Artificial Intelligence", Oxford University Press, Oxford, 1990, ISBN 0-19-824854-7. 43

Shakespeare, W.: *Hamlet* (*c.* 1601), Edición bilingüe del Instituto Shakespeare dirigida por M.A. Conejero, Cátedra, Madrid, 1997, ISBN 84-376-1097-4. 37

Shannon, C.E.: *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J., vol. 27, julio de 1948, pp. 379–423. Recopilado por D. Slepian en "Key Papers in The Development of Information Theory", IEEE Press, Nueva York, 1974, ISBN 0-87942-027-8. 60

Smullyan, R.: *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otras paradojas lógicas*, Cátedra, Madrid, 1984, ISBN 84-376-0297-1. 27

Tovar, A.: *Vida de Sócrates*, 2ª edición, Alianza, Madrid, 1984, ISBN 84-206-2397-0. 36

Turing, A.M.: *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (1937). Recopilado por Ph. Laplante en "Great Papers in Computer Science", West & IEEE Press, Minneapolis, 1996, ISBN 0-7803-1112-4. 131

Turing, A.M.: *Computing Machinery and Intelligence* (1950). Recopilado por M. Boden en "The Philosophy of Artificial Intelligence", Oxford University Press, Oxford, 1990, ISBN 0-19-824854-7. 43

Wittgenstein, L.: *Tractatus Logico-Philosophicus* (1922), Alianza, Madrid, 1987, ISBN 84-206-2050-5. 41, 70, 90

Índice de definiciones

Se indican las páginas en las que aparecen las definiciones técnicas de los conceptos listados.

Índice de nombres

Índice

I. Introducción

II. El problema aparente

Anexo

Índices

El problema aparente es una reelaboración en forma de ensayo de mi prolongada tesis doctoral. La tesis fue dirigida por el Profesor Fernando Sáez Vacas, de la Universidad Politécnica de Madrid, y fue defendida el día 11 de mayo de 1993 ante un tribunal compuesto por los Profesores Gregorio Fernández (Universidad Politécnica de Madrid), Miguel Ángel Quintanilla (Universidad de Salamanca), José Cuena (Universidad Politécnica de Madrid), Ángel Rivière (Universidad Autónoma de Madrid) y Carlos Delgado Kloos (Universidad Politécnica de Madrid), que le concedieron por unanimidad la máxima calificación, apto *cum laude*.

El problema aparente presenta una teoría del conocimiento modelada matemáticamente, de manera que sus conceptos son precisos y sus consecuencias verificables. Pretende, por tanto, sentar las bases de una epistemología científica. La introducción, que intenta facilitar el entendimiento de la teoría y la lectura del libro, incluye una sinopsis (a partir de la página 80) que resume el contenido.

El problema aparente sostiene i) que el simbolismo es un sistema extensible de convenciones que sirve para resolver problemas porque permite la expresión de problemas, soluciones y resoluciones, y ii) que el simbolismo fue diseñado por la evolución darwiniana porque la vida es un problema aparente y porque el simbolismo proporciona, de una sola vez, la resolución de problemas, la consciencia, el lenguaje y la libertad. De aquí se sigue que el simbolismo está vacío de significados y que son los problemas los que aportan los significados. La teoría es subjetivista porque es el sujeto simbólico quien da significado al objeto. Pero como saber es un medio, el fin es vivir, y el sujeto individual es una parte de la vida, resulta que de donde el individuo toma los significados últimos es de la vida, por lo que todos los seres vivos disponen de una fuente común de significados que hace posible la comunicación.

El problema aparente trata del saber, por lo que se sitúa en el cruce de todos los saberes específicos y, en consecuencia, puede ser atacado desde muy diferentes posiciones. Algunas de las disciplinas que se ven afectadas, en mayor o menor grado, por esta epistemología de carácter subjetivista son: ética, filosofía, epistemología, lingüística, lógica, matemáticas, informática, inteligencia artificial, psicología, neurología y biología.

El problema aparente presenta una teoría del conocimiento modelada matemáticamente, de modo que sus conceptos son precisos y sus consecuencias son verificables. Pretende, por consiguiente, sentar las bases de una epistemología científica. Responde, entre otras, a cuestiones tales como:
¿Hay diferencia entre adaptación y aprendizaje?
¿Qué maneras hay de resolver un problema?
¿Hay diferencia entre saber y conocimiento?
¿Cuál es el último reducto del absolutismo?
¿Hay diferencia entre solución y resolución?
¿Qué razón evolutiva tiene el simbolismo?
¿Se pueden pensar varias cosas a la vez?
¿Qué conceptos son transcendentes?
¿Cómo es posible la comunicación?
¿Se puede fabricar una persona?
¿Cuál es el problema aparente?
¿Para qué sirve la consciencia?
¿Es mi cuerpo parte de mi yo?
¿Son peligrosas las paradojas?
¿Sabe sumar una calculadora?
¿Es inteligente un ordenador?
¿Qué es un comportamiento?
¿Por qué sufrimos ilusiones?
¿Qué niega el materialismo?
¿Para qué sirve la sintaxis?
¿Puede ser feliz un perro?
Esta frase es falsa, ¿lo es?
¿Para qué sirve la lógica?
¿Qué significa significa?
¿Qué es la abstracción?
¿Qué es un problema?
¿Soy yo una persona?
¿Qué es la felicidad?
¿Puedo yo ser libre?
¿Qué es la libertad?
¿Explica la ciencia?
¿Por qué morimos?
¿Piensa un perro?
¿Qué es un vaso?
¿Qué es la vida?
¿Qué soy yo?

ISBN 84-7774-877-2
9 788477 748779